This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

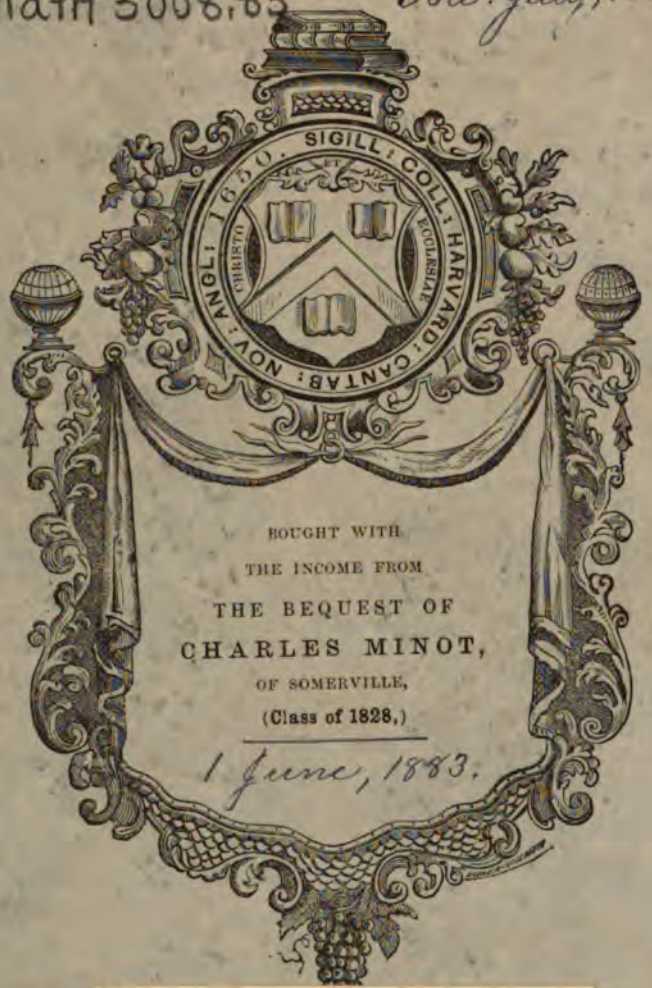
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 3008.83 Bd. July, 1883.



SCIENCE CENTER LIBRARY

VI, 3058

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS DE M. HERMITE

Professé pendant le 2e Semestre 1881-82

RÉDIGÉ

PAR M. ANDOYER

ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Second tirage, revu par M. HERMITE

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

8, Rue de la Sorbonne, 8

—

1883

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS

DE M. HERMITE

Professé pendant le 2e Semestre 1881-82

RÉDIGÉ

Par M. ANDOYER

ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS
DE M. HERMITE

Professé pendant le 2e Semestre 1881-82

RÉDIGÉ

PAR M. ANDOYER

ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Second tirage, revu par M. HERMITE

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
8, Rue de la Sorbonne, 8

1883

Math ~~3608.83~~
3008.83

1883. June 1,
Minot Fund

Paris. 1883.

COURS PROFESSÉ A LA FACULTÉ des SCIENCES

pendant le 2ème Semestre 1881-1882.

par

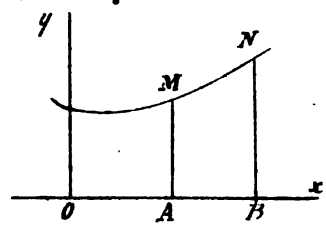
M. Hermite.

2ème Édition
revue par l'auteur.

1ère Leçon.

Les applications géométriques du Calcul Intégral ont pour objet :
La quadrature des courbes planes ;
La rectification des courbes planes ou gauches ;
La quadrature des surfaces courbes ;
L'évaluation des volumes limités par des surfaces courbes.

Ces applications conduisent à l'emploi des diverses méthodes exposées dans la recherche des intégrales indéfinies.



On sait qu'à l'égard d'une courbe quelconque rapportée à des coordonnées rectangulaires, $y = f(x)$, l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$

représente le segment MNAB compris entre l'arc MN, l'axe Ox et les ordonnées MA, NB qui correspondent aux abscisses x_0 et x_1. Considérons en premier lieu l'ellipse :

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ ;$$

l'intégrale

$$\int \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

à laquelle nous sommes amenés est de la forme $\int y\,dx$, y étant une fonction algébrique de x, c'est-à-dire définie par une équation $f(x, y) = 0$ dont le premier membre est entier par rapport à x et à y.

Si cette fonction $f(x, y)$ est du deuxième degré en x et y, on sait que l'intégration

est possible, et en général il en sera ainsi toutes les fois que x et y peuvent être exprimés rationnellement en fonction d'une nouvelle variable t. Mais il n'est pas nécessaire de recourir dans le cas présent à cette considération. Posons :

$$S = \int_a^b \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$
$$S' = \int_a^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

on aura : $$S = \frac{b}{a} S'.$$

S' étant la valeur de S pour $b = a$, c'est la relation connue qui existe entre un segment d'ellipse et le segment du cercle principal, limité aux mêmes ordonnées.

Calculons $$S' = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx,$$

nous ramènerons d'abord à la forme canonique :

$$S' = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$
$$= a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Pour obtenir ensuite la deuxième intégrale, nous employerons de préférence, au lieu de l'intégration par parties, la méthode suivante de Legendre.

Elle consiste à partir de l'identité :

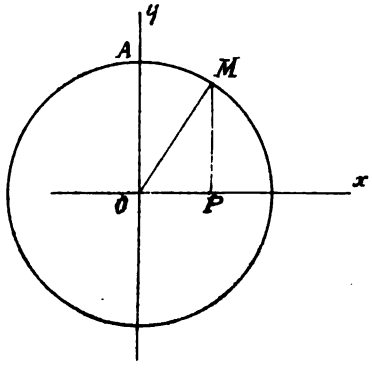
$$D_x\left(x\sqrt{a^2 - x^2}\right) = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

qui donne : $$x\sqrt{a^2 - x^2} = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - 2\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

par conséquent : $$2S' = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

et finalement : $$S' = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Comptons l'aire à partir de l'axe des y, en convenant que : $\arcsin \frac{x}{a}$ représente le plus petit des arcs qui ont $\frac{x}{a}$ pour sinus, cet arc étant d'ailleurs positif, puisque y et par suite $\sqrt{a^2 - x^2}$ en positif dans l'intégrale $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Alors S' devant s'évanouir avec x, il faut poser $C = 0$, et l'on a :



$$S' = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

Cette expression représente l'aire du segment AOMP du cercle $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, OP étant égal à x.

Or $\frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2}$ est le triangle OMP ; l'aire du secteur AOM est donc $\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$.

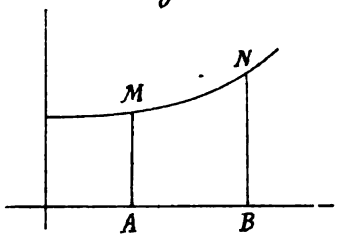
Si on fait $x = a$, on conclut pour le quart du cercle le résultat connu $\frac{\pi a^2}{4}$.

On parvient d'une autre manière à la quadrature de

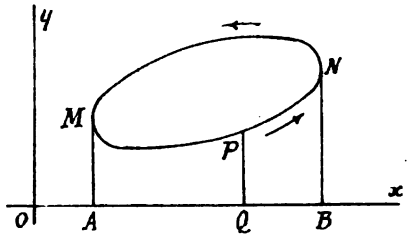
l'ellipse en exprimant les coordonnées de ses points par les formules :

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$

En général, supposons une courbe définie par les équations $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, l'intégrale $\int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$ représentera le segment $MNAB$, sous la condition qu'en faisant croître t de α à β les expressions de x et y donnent tous les points de l'arc MN, depuis M jusqu'à N.



Considérons maintenant, en conservant la même variable auxiliaire, une courbe fermée qui soit décrite en entier et une seule fois, à partir du point P dans le sens PNM, tel que l'espace illimité se trouve toujours à droite, t croissant de α à β ; supposons de plus que la courbe ne se coupe point et qu'à une même abscisse correspondent seulement deux ordonnées. Soient M et N les points limites dont les ordonnées sont des tangentes : considérons successivement les arcs PN, NM, MP en admettons que le premier soit décrit en faisant croître t de α à γ, le second de γ à δ, le troisième de δ à β. On a :



$$PQNB = \int_\alpha^\gamma \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt,$$
$$NBMA = \int_\delta^\gamma \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt,$$
$$MAPQ = \int_\delta^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Soit donc S l'aire de la courbe fermée ; ces diverses expressions nous donnent :

$$-S = MAPQ + PQNB - NBMA = \int_\alpha^\gamma \psi\varphi'\,dt - \int_\delta^\gamma \psi\varphi'\,dt + \int_\delta^\beta \psi\varphi'\,dt,$$

ou

$$-S = \int_\alpha^\gamma \psi\varphi'\,dt + \int_\gamma^\delta \psi\varphi'\,dt + \int_\delta^\beta \psi\varphi'\,dt$$

et finalement

$$-S = \int_\alpha^\beta \psi\varphi'\,dt.$$

L'intégrale $\int_\alpha^\beta \psi\varphi'(t)\,dt$, changée de signe, représente donc l'aire comprise dans l'intérieur de la courbe. On verra immédiatement, d'ailleurs, que l'intégrale représente l'aire sans changer le signe, lorsque son contour est décrit de manière que l'espace illimité se trouve à gauche.

Appliquons ce résultat à l'ellipse, en employant les formules :

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$

Si on fait croître t de 0 à 2π, la courbe se trouve complètement décrite, et une seule fois, l'espace illimité étant toujours à droite de la direction du point décrivant.

En désignant par S l'aire de l'ellipse, nous aurons ainsi :

$$S = -\int_0^{2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} ab\cos^2 t\,dt.$$

Appliquons maintenant à l'intégrale $\int \cos^2 t\,dt$ la méthode générale relative à la quantité $\int \cos^m x \sin^n x\,dx$. On transforme les puissances ou produits de puissances du cosinus et du sinus de x en expressions linéaires par rapport aux cosinus et sinus des multiples de l'arc. Ici nous obtenons immédiatement :

$$\int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C,$$

d'où : $$S = ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi ab.$$

La remarque suivante conduit, comme on va voir, à un calcul plus simple.

Reprenons la formule : $S = -\int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$; on a évidemment :

$$\varphi(t)\,\psi(t) = \int [\varphi(t)\psi(t) + \varphi'(t)\psi(t)]\,dt,$$

et comme les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ ont la même valeur aux limites α et β, nous pouvons écrire :

$$0 = \int_\alpha^\beta [\varphi(t)\psi'(t) + \varphi'(t)\,\psi(t)]\,dt;$$

ce qui donne facilement :

$$2S = \int [\varphi(t)\,\psi'(t) - \varphi'(t)\,\psi(t)]\,dt.$$

Dans le cas de $\varphi(t) = a\cos t$, $\psi(t) = b\sin t$, cette formule conduit immédiatement à l'expression :

$$2S = \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = 2\pi ab;$$

et si l'on considère une courbe unicursale, de sorte qu'on ait : $x = \frac{B}{A}$, $y = \frac{C}{A}$, A, B, C étant des polynômes entiers en t, on trouvera :

$$2S = \int_\alpha^\beta \left[\frac{B(AC'-CA')}{A^3} - \frac{C(AB'-BA')}{A^3}\right] dt = \int_\alpha^\beta \frac{BC'-CB'}{A^2}\,dt.$$

La simplification consiste en ce que la fraction rationnelle à intégrer a pour dénominateur A^2, au lieu de A^3, comme on l'avait dans la première formule.

Considérons en second lieu l'hyperbole :

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

et soit : $$S = \frac{b}{a}\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{b}{a}S',$$

S' étant le segment correspondant de l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = a^2$.

Nous aurons, comme plus haut :

$$S' = \int \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx,$$

puis : $$x\sqrt{x^2-a^2} = \int \frac{2x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

d'où : $$2S' = x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

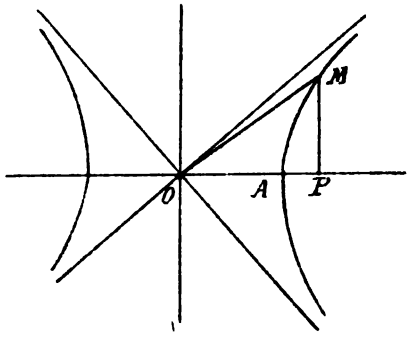
Or, au moyen de la formule : $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$, on voit qu'en faisant partir l'aire depuis le sommet A de la courbe, on a si l'on dispose convenablement de la constante arbitraire :

$$S' = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Or $$OMP = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}.$$

Donc l'aire du secteur OAM a pour valeur :

$$\frac{a^2}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$



Faisons $a = 1$, comme $y = \sqrt{x^2 - a^2}$, nous obtenons :

$$2t = \log(x+y);$$

On tire de là : $x + y = e^{2t}$

et d'après l'équation : $x^2 - y^2 = 1$: $x - y = e^{-2t}$

Ces formules nous donnent :

$$\begin{cases} x = \dfrac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} \\ y = \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}, \end{cases}$$

x et y s'expriment donc en fonction de e^{2t}, comme $\sin x$ et $\cos x$ s'expriment en fonction de $e^{x\sqrt{-1}}$. Cette correspondance analytique pouvait être prévue en remarquant que l'aire de l'hyperbole devient celle du cercle en introduisant le facteur $\sqrt{-1}$. Aussi désigne-t-on x et y sous les noms de cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique de $2t$. Il n'est pas inutile de s'arrêter un moment aux conséquences géométriques de cette correspondance analytique.

Soient deux secteurs hyperboliques t et t' ; nous aurons les équations suivantes :

$$x + y = e^{2t} \qquad x - y = e^{-2t}$$
$$x' + y' = e^{2t'} \qquad x' - y' = e^{-2t'}.$$

Cherchons maintenant les coordonnées X, Y d'un point de l'hyperbole tel que le secteur correspondant soit égal à $t + t'$. Cette condition nous donne :

$$X + Y = e^{2(t+t')} \qquad X - Y = e^{-2(t+t')},$$

et l'on en conclut :

$$\begin{cases} X + Y = (x+y)(x'+y') \\ X - Y = (x-y)(x'-y'), \end{cases}$$

d'où :

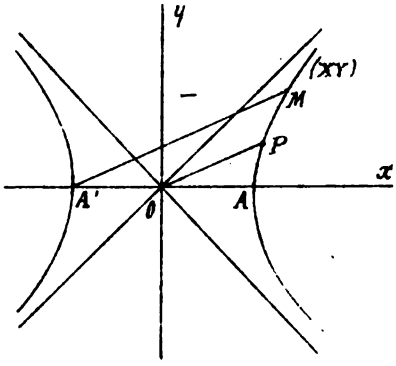
$$\begin{cases} X = xx' + yy' \\ Y = xy' + yx', \end{cases}$$

formules analogues à celles qui donnent $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

On a, d'ailleurs, l'identité facile à vérifier :

$$Y(x+x') = (y+y')(1+X);$$

elle montre que le point (X, Y) s'obtiendra en coupant l'hyperbole par une droite passant par le second sommet A', et parallèle à la droite OP qui joint le point O au milieu P de la corde MM'.



C'est là une construction toute pareille à celle que l'on peut faire dans le cercle pour résoudre le problème correspondant.

Nous envisagerons encore comme application la formule des quadratures, la cycloïde définie par les équations :

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

a étant le rayon du cercle générateur.

La portion de la cycloïde compris entre deux points consécutifs de rencontre avec Ox

a une aire exprimée par l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,dt .$$

Or on a :

$$\int(1-\cos t)^2 dt = \int dt - 2\int \cos t\,dt + \int \cos^2 t\,dt ;$$

en en appliquant au dernier terme la méthode indiquée plus haut, nous parvenons à l'expression :

$$t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C$$

ou

$$\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4} + C .$$

L'aire totale de la cycloïde est donc $3\pi a^2$, c'est, comme Galilée l'a découvert le premier, trois fois l'aire du cercle générateur.

La quadrature des courbes du troisième degré se ramène à la rectification des coniques, c'est-à-dire, pour plus de précision, aux intégrales que l'on trouve pour les arcs d'ellipse, et qui, en raison de cette circonstance, ont été nommées intégrales elliptiques. Il est facile de le vérifier ; prenons pour origine un point quelconque de la courbe, et menons par ce point une sécante $y = tx$. Elle coupe la courbe en deux points distincts de l'origine, dont les abscisses sont données par l'équation : $Ax^2 + Bx + C = 0$, A étant du 3e degré en t, B du 2ème et C du 1er. Donc $B^2 - 4AC$ est du 4ème degré en t. Par suite, $\int y\,dx$ s'exprime rationnellement en fonction de t et du radical $\sqrt{B^2 - 4AC}$ portant sur un polynôme du quatrième degré en t. Le même fait se produisant quand on cherche à rectifier les courbes du second degré, la propriété énoncée est démontrée.

IIe Leçon.

Les cubiques planes se partagent en deux classes, et cette distinction est également importante au point de vue géométrique et au point de vue analytique.

Quand une cubique $f(x,y) = 0$ a un point double, c'est-à-dire quand les trois équations $f(x,y) = 0$, $f'_x(x,y) = 0$, $f'_y(x,y) = 0$, ont une solution commune, en prenant ce point pour origine des coordonnées, on sait que l'équation de la courbe rapportée aux nouveaux axes ne contiendra plus que des termes du troisième et du second degré. Donc, en posant $y = tx$, on pourra exprimer les coordonnées x et y d'un point quelconque de la courbe rationnellement en fonction de la nouvelle variable t. La cubique considérée appartient donc à la classe de courbes nommées unicursales par M. Cayley, et qui sont telles que les coordonnées de chacun de leurs points peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'une variable auxiliaire t. MM. Chasles et Clebsch ont publié sur la théorie de ces courbes des travaux du plus grand intérêt, mais c'est Riemann qui a le premier montré toute l'importance pour l'analyse de la considération des points doubles des courbes algébriques.

Dans le cas général, nous avons vu que les coordonnées d'un point quelconque d'une cubique s'expriment rationnellement en fonction d'une variable t et d'un radical carré, portant sur un polynôme du quatrième degré $R(t)$. Mais comment arrive-t-il dans le cas où la cubique a un point double, que les coordonnées des points de la courbe puissent s'exprimer rationnellement en fonction d'une variable auxiliaire? Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que le polynôme $R(t)$ jouisse de propriétés particulières. En cherchant à traiter ce cas par un calcul direct, on rencontrerait de grandes difficultés. Voici l'indication succincte de la marche qu'il faudrait suivre :

Nous avons vu que a et b étant un point quelconque de la courbe, on pose : $y-b=(x-a)t$. On a alors, pour déterminer x, l'équation :

$$Ax^2+Bx+C=0\ ,$$

et nous avons posé

$$B^2-4AC=R(t).$$

Il faudrait calculer le discriminant du polynôme $R(t)$, qui contient un paramètre absolument arbitraire, a par exemple ; I et J étant les invariants de deuxième et de troisième degré, ce discriminant est I^3-27J^2. Ensuite, il faudrait mettre en évidence, comme facteur dans ce discriminant, le discriminant de la forme cubique $f(x,y)$; c'est-à-dire l'expression S^3-T^2, si S et T sont les invariants de cette forme. On démontrerait ainsi par un calcul direct que, si la cubique a un point double, le polynôme $R(t)$ admet une racine double, de sorte que le radical ne porte plus que sur un polynôme du 2ème degré. Nous établirons aisément ce résultat de la manière suivante. La courbe ayant un point double, nous poserons :

$$x=\frac{G}{K}\qquad y=\frac{H}{K}\ ,$$

G, H, K étant des polynômes entiers du troisième degré par rapport à une variable auxiliaire u.

Si alors on applique la méthode générale, on fera :

$$y-b=(x-a)t,$$

a et b étant les coordonnées d'un point quelconque de la courbe. Pour obtenir maintenant x et y en fonction de t, nous chercherons u en fonction de cette variable, en employant la relation:

$$H-bK=t\,(G-aK).$$

Cette équation est du troisième degré en u ; mais si nous désignons par u_0 la valeur de u relative au point (a,b) il est clair qu'elle admet la racine u_0 ; supprimant donc le facteur $u-u_0$, il reste une équation du second degré :

$$Lu^2+Mu+N=0,$$

où L, M, N sont manifestement du premier degré en t.

Ceci nous montre que x et y s'expriment rationnellement en fonction de t et du radical $\sqrt{M^2-4LN}$ qui porte sur un polynôme du second degré en t seulement. Il en résulte que le polynôme $R(t)$, considéré plus haut, se réduit au second degré ; il admet donc une racine double, c'est-à-dire que son discriminant est nul.

Pour avoir les coordonnées x et y des points de la cubique unicursale en fonction

rationnelle d'une seule variable auxiliaire u, il suffira de faire une transformation de la forme $t = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$.

En général, d'ailleurs, lorsqu'on a un radical $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ et qu'on veut exprimer rationnellement x et y en fonction d'une variable auxiliaire, on n'a plus recours à l'analyse si ingénieuse de Diophante et employée pendant longtemps dans le Calcul Intégral. On se place au point de vue géométrique, et on arrive ainsi à des méthodes nouvelles et plus fécondes. On remarque que l'équation $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ représente une conique, et on coupe cette courbe par des sécantes issues de l'un quelconque de ses points.

Revenons aux coordonnées x et y, des points d'une cubique quelconque qui peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de t et $\sqrt{R(t)}$, $R(t)$ désignant un polynôme du quatrième degré en t.

Si on fait la transformation $t = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$, on voit que l'on aura toujours x et y exprimés rationnellement en fonction de la nouvelle variable u et de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré en u. C'est là l'origine d'une question aussi intéressante qu'importante.

Désignons par x la variable indépendante et considérons le radical $\sqrt{R(x)}$, $R(x)$ étant un polynôme du quatrième degré. Dans une fonction rationnelle de x et $\sqrt{R(x)}$ nous pouvons introduire trois constantes absolument arbitraires par la transformation : $x = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$.

On en profite pour simplifier les fonctions rationnelles de x et de $\sqrt{R(x)}$; on entend par là les ramener à la forme canonique, c'est-à-dire les exprimer en fonction rationnelle de t et d'un radical de la forme $\sqrt{at^4 + bt^2 + c}$, le polynôme du quatrième degré sur lequel porte le radical ne contenant plus que les puissances paires de la variable. Cette réduction à la forme canonique est d'une haute importance dans la rectification des courbes du second degré et dans la théorie des fonctions elliptiques : nous allons l'exposer en suivant la méthode du Traité des fonctions elliptiques de Legendre.

Soit :
$$R(x) = A(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

et posons :
$$x = \frac{p + qt}{1 + t}.$$

Nous nous plaçons avec Legendre au point de vue des quantités réelles, c'est-à-dire que nous supposons les coefficients de $R(x)$ essentiellement réels, et que nous cherchons pour p et q des valeurs réelles.

Aux quatre racines de $R(x)$ correspondent quatre racines du polynôme transformé; mais ces quatre quantités doivent être deux à deux égales et de signes contraires, en remarquant que $t = \frac{x-p}{q-x}$, nous pouvons poser les équations suivantes :

$$\frac{a-p}{q-a} = -\frac{b-p}{q-b}; \qquad \frac{c-p}{q-c} = -\frac{d-p}{q-d};$$

Si l'on pose :
$$p + q = g, \quad pq = h,$$

elles deviennent :
$$\begin{cases} g(a+b) = 2(h + ab) \\ g(c+d) = 2(h + cd), \end{cases}$$

d'où, supposant $a+b-c-d$ différent de zéro :

$$g = 2\,\frac{ab-cd}{a+b-c-d}\,; \quad h = \frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{a+b-c-d}\,.$$

Ces expressions montrent que a, b, c, d étant réelles, g et h seront réelles ; s'il y a deux racines imaginaires, on les prendra pour a et b, et g et h seront encore réelles ; enfin si les quatre racines sont imaginaires, on prendra pour a et b deux racines conjuguées, et pour c et d les deux autres ; g et h seront encore réelles.

Mais pour qu'il en soit de même de p et q, il faut que la condition suivante soit remplie :

$$\frac{1}{4}\,g^2 - h > 0$$

ou
$$(a+b-c-d)^2\left[(ab-cd)^2 - \left\{ab(c+d)-cd(a+b)\right\}\left\{a+b-c-d\right\}\right] > 0\,.$$

Au moyen d'une transformation facile, qui consiste à mettre en évidence les différences $b-c$ et $a-d$, le second facteur s'écrit :

$$[a(b-c)+c(a-d)]^2 - [ad(b-c)+bc(a-d)](b-c+a-d)\,,$$

c'est-à-dire :
$$(b-c)^2(a^2-ad)+(a-d)^2(c^2-bc)+(a-d)(b-c)(2ac-ad-bc)\,,$$

ou :
$$(a-d)(b-c)(a(b-c)-c(a-d)+2ac-ad-bc)\,,$$

en finalement :
$$(a-d)(b-c)(b-d)(a-c)\,.$$

La condition de réalité concernant p et q est donc :

$$(a+b-c-d)^2(a-d)(a-c)(b-d)(b-c) > 0\,.$$

On y satisfera de la manière suivante :

Si les 4 racines sont réelles, on prendra $a > b > c > d$;

Si 2 racines sont imaginaires, on les prendra pour a et b ;

Si les 4 racines sont imaginaires, on prendra pour a et b deux racines conjuguées, pour c et d les deux autres.

Ces hypothèses s'accordent avec celles qui rendent g et h réelles. Il est donc établi que la réduction à la forme canonique peut toujours s'effectuer à l'aide d'une substitution réelle.

Nous avons écarté momentanément le cas où $a+b-c-d=0$; dans ce cas on arrive facilement au résultat cherché en posant simplement :

$$x = t + \frac{a+b}{2}\,.$$

Evaluation des aires en coordonnées polaires.

L'aire d'un secteur de courbe compris entre les rayons répondant aux angles ω_0 et ω_1 est donnée par la formule

$$S = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \rho^2\, d\omega\,.$$

Nous l'appliquerons en considérant l'ellipse :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1\,,$$

ou bien en coordonnées polaires :

$$\rho^2 = \frac{1}{A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega}\,;$$

ce qui conduit à l'intégrale :

$$\int \frac{d\omega}{A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega}.$$

La méthode générale pour rendre rationnelle une différentielle de la forme $f(\sin\omega, \cos\omega)\,d\omega$ consiste à poser $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega = t$; ce qui donne effectivement :

$$\sin\omega = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\omega = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad d\omega = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Mais cette méthode très-simple à indiquer est souvent pénible à appliquer, et il faut, suivant les cas, chercher une marche plus commode.

En particulier, on pourra rendre rationnelle la différentielle proposée en posant $\operatorname{tg}\omega = t$, toutes les fois que la fonction $f(\sin\omega, \cos\omega)$, que l'on suppose rationelle en $\sin\omega$ et $\cos\omega$, ne change pas quand on remplace ω par $\omega + \pi$. Nous avons en effet :

$$\sin\omega = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos\omega = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

et par suite $f(\sin\omega, \cos\omega)$ prend la forme :

$$A + \frac{B}{\sqrt{1+t^2}}, \quad A \text{ et } B \text{ étant des fonctions rationnelles de } t.$$

Remplaçons ω par $\omega + \pi$, t conservera la même valeur, et comme $\sin\omega$ et $\cos\omega$ changeront de signe, il faudra changer le signe de $\sqrt{1+t^2}$. Donc on aura :

$$f[\sin(\omega+\pi), \cos(\omega+\pi)] = A - \frac{B}{\sqrt{1+t^2}};$$

et comme par hypothèse :

$$f(\sin\omega, \cos\omega) = f[\sin(\omega+\pi), \cos(\omega+\pi)]$$

il en résulte $B = 0$, donc $f(\sin\omega, \cos\omega) = A$, c'est-à-dire une fonction rationnelle de t.

Cette circonstance se présente dans le cas présent ; en faisant $\operatorname{tg}\omega = t$, on a l'intégrale :

$$\int \frac{dt}{A + 2Bt + Ct^2}.$$

Supposons maintenant qu'il s'agisse de calculer l'aire totale S de l'ellipse ; elle sera donnée par l'intégrale :

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega},$$

et puisque la différentielle ne change pas quand on remplace ω par $\omega + \pi$, on peut prendre pour limites : $\omega = 0$, $\omega = \pi$, en doublant l'intégrale ; ce qui donne :

$$S = \int_0^{\pi} \frac{d\omega}{A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega}.$$

Une circonstance à laquelle je m'arrête un moment est à remarquer : on a posé $\operatorname{tg}\omega = t$, de sorte qu'aux limites $\omega = 0$ et $\omega = \pi$, on trouve la même valeur $t = 0$, et il semble résulter de là que l'intégrale est nulle. Il est facile de lever ce paradoxe en remarquant que quand ω passe par la valeur $\frac{\pi}{2}$, t passe de $+\infty$ à $-\infty$, c'est-à-dire éprouve une discontinuité. Il faut donc partager l'intégrale en 2 autres en écrire :

$$\int_0^{\pi} f(\omega)\,d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\omega)\,d\omega + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\omega)\,d\omega\ ;$$

or, en remarquant que la fonction $f(\omega)$ ne change pas quand on remplace ω par $\omega+\pi$, on a :

$$\int_0^{\pi} f(\omega)\,d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\omega)\,d\omega + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(\omega)\,d\omega = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\omega)\,d\omega$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{A\cos^2\omega + B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega}\ .$$

Cette fois la variable t n'éprouve plus de discontinuité lorsque ω croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, et nous pouvons écrire :

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{A + 2Bt + Ct^2}$$

Si la courbe est une ellipse, on a : $AC - B^2 > 0$, et par suite en appliquant la méthode ordinaire, on trouve :

$$S = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}\ .$$

Cette expression donne l'aire de l'ellipse, mais en même temps elle est remarquable en ce qu'elle permet d'exprimer au moyen d'une intégrale définie, où entrent rationnellement A, B, C, le radical $\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}$. On a en effet :

$$\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\omega}{A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega}\ .$$

Il existe d'autres exemples du même fait, et nous citerons en particulier la formule :

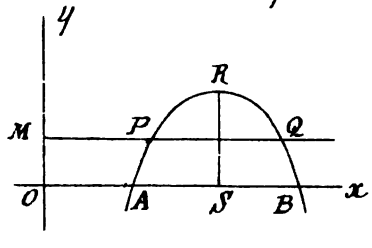
$$\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{A + iB\cos\omega + iC\sin\omega}\ ,$$

où $i = \sqrt{-1}$. Cette égalité a été le point de départ d'un mémoire important de Jacobi, dans lequel le grand géomètre obtient par une analyse d'une extrême élégance les propriétés des polynômes de Legendre et des fonctions de Laplace.

Le paradoxe que nous avons rencontré tout-à-l'heure se présente souvent dans des circonstances moins simples.

Soit l'intégrale $\int_a^b F'(x)\,dx$; posons $y = f(x)$, et supposons que y s'annule pour les limites $x = a$, $x = b$. Il en résulte que l'intégrale semble être nulle, il n'en est rien cependant, même si l'on suppose que y reste continu quand x varie de a à b.

Voici l'explication de ce paradoxe : Traçons la courbe $y = f(x)$: x variant depuis $OA = a$ jusqu'à $OB = b$, on a l'arc de courbe ARB. Prenons l'ordonnée y pour variable indépendante ; à chaque valeur de y correspondent 2 valeurs de x, et nous supposons qu'il n'y en ait pas plus de deux :



La figure suffit alors pour lever toute difficulté, RS étant l'ordonnée maximum, on devra calculer l'intégrale 1° entre les limites zéro et RS, en pour x la plus petite des deux valeurs qui répondent à une même valeur de y ; 2° entre les limites RS et zéro, en prenant pour x la plus grande des deux valeurs qui répondent à une

même valeur de y : ensuite on fera la somme des deux intégrales trouvées.

Le changement de variable dans les intégrales donne donc lieu à des remarques importantes qu'il est impossible de passer sous silence. Eclaircissons ce qui précède par un exemple.

On est conduit dans l'étude des polynômes de Legendre à la considération de l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^m\,dx}{(a-x)^{m+1}},$$

où a est supérieur à 1 en valeur absolue. Introduisons une nouvelle variable en posant :

$$\frac{1-x^2}{a-x} = 2y\,;$$

pour les limites $x=1$ et $x=-1$, y s'annule, on se trouve donc dans le cas indiqué plus haut.

De l'équation nous tirons en regardant y comme la variable indépendante, deux valeurs de x

$$\begin{cases} x = y - \sqrt{y^2-2ay+1} \\ x = y + \sqrt{y^2-2ay+1}\,. \end{cases}$$

La valeur maximum de y s'obtient lorsque les deux racines deviennent égales et satisfait à l'équation :

$$y^2-2ay+1=0\,;$$

c'est donc la quantité : $a-\sqrt{a^2-1}$, dans le cas où $a>0$, puisque la valeur de x correspondante doit être comprise entre -1 et $+1$, et qu'on suppose $a>1$.

La relation entre x et y nous donne d'ailleurs :

$$\frac{dx}{a-x} = \cdot\frac{dy}{y-x},$$

de sorte que l'intégrale proposée sera exprimée par la somme des deux suivantes :

$$\int_0^{a-\sqrt{a^2-1}} \frac{(2y)^m\,dy}{\sqrt{y^2-2ay+1}} + \int_{a-\sqrt{a^2-1}}^{0} -\frac{(2y)^m\,dy}{\sqrt{y^2-2ay+1}},$$

ou finalement :

$$2\int_0^{a-\sqrt{a^2-1}} \frac{(2y)^m\,dy}{\sqrt{y^2-2ay+1}}.$$

IIIe Leçon.

Si l'on représente par σ l'arc d'une courbe dont les coordonnées sont x et y, on a l'expression :

$$\sigma = \int \sqrt{dx^2+dy^2}$$

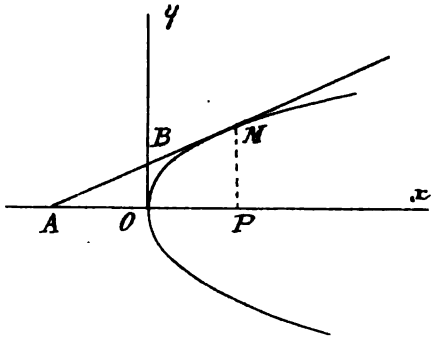
que nous appliquerons, en premier lieu, à la parabole. L'équation de la courbe étant $y^2=2px$, nous prendrons y comme variable indépendante, ce qui donne :

$$dx = \frac{y\,dy}{p},$$

d'où :

$$\sigma = \frac{1}{p}\int \sqrt{y^2+p^2}\;dy.$$

Nous avons déjà rencontré cette intégrale quand nous nous sommes occupés de la quadrature de l'hyperbole ; seulement p^2 était remplacé par $-a^2$. On a donc immédiatement l'expression suivante pour l'arc de la courbe compté à partir du sommet :



$$\sigma = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{1}{2}\,p\,\log\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}.$$

Voici la signification du terme algébrique de cette expression. Soit M le point (x,y). Menons la tangente MBA. On sait que $MB = \frac{MA}{2}$; d'ailleurs :

$$MA = \sqrt{MP^2+AP^2} = \sqrt{y^2+4x^2}.$$

Donc :

$$MB = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p}.$$

Comme seconde application de la formule de rectification, nous allons considérer l'ellipse :

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2};$$

cette équation donne :

$$dy = -\frac{b\,x\,dx}{a\sqrt{a^2-x^2}},$$

on obtient donc :

$$\sigma = \frac{1}{a}\int \frac{\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,$$

ou si l'on pose $a^2-b^2 = a^2k^2$, il vient :

$$\sigma = \int\sqrt{\frac{a^2-k^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx = \int\frac{a^2-k^2x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-k^2x^2)}}\,dx.$$

Soit encore : $x = a\sin\varphi$, $k = \frac{e}{a}$, et $E^1(k,\varphi) = \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$, nous aurons sous la forme introduite par Legendre :

$$\sigma = aE(k,\varphi),$$

expression qui représente l'arc d'ellipse compté à partir de l'extrémité du petit axe. Le quadrant correspondant à $\varphi = \frac{\pi}{2}$ est désigné par $E(k)$ et reçoit le nom de fonction complète, k est le module et φ l'amplitude de l'intégrale. On appelle aussi complément du module la quantité $k' = \sqrt{1-k^2}$, dont l'emploi est continuel, et qui s'offre par exemple dans l'expression de l'arc de l'ellipse si l'on prend pour origine l'extrémité du grand axe. Ayant alors :

$$\sigma = a\int^{\varphi}\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}\,d\varphi,$$

nous trouvons, en introduisant le sinus au lieu du cosinus :

$$\sigma = a\int^{\varphi}\sqrt{k'^2+k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Passons maintenant à l'hyperbole :

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2};$$

l'intégrale dont dépend la rectification, savoir :

$$\frac{1}{a}\int \frac{\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

a la même expression analytique que dans le cas de l'ellipse. Elle en diffère toutefois par cette circonstance que la variable doit être plus grande que a et peut croître jusqu'à une limite finie quelconque.

Legendre, qui désigne l'arc d'hyperbole par T, lui donne une autre forme et l'obtient comme il suit: En supposant égale à l'unité la distance du centre au foyer de sorte qu'on ait : $a^2+b^2=1$; on exprime au moyen d'un angle auxiliaire les coordonnées de la courbe par ces formules :

$$x=\frac{a\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}, \qquad y=b^2\operatorname{tang}\varphi.$$

Cela étant, nous trouvons d'abord :

$$T=\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int\frac{b^2\,d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}},$$

en l'identité suivante :

$$D_\varphi\left[\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}\right]=\frac{b^2}{\cos^2\varphi\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}-\frac{b^2}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}+\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi},$$

permet d'écrire, si l'on compte les arcs à partir de l'extrémité de l'arc réel :

$$T=\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}+b^2\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}-\int_0^\varphi\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Dans cette formule, le terme algébrique, $\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}$, représente la position de la tangente à l'hyperbole qui est comprise entre le point de contact et la projection du centre sur la droite. L'intégrale $\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}$ est désignée sous le nom de fonction de première espèce et représentée par $F(a,\varphi)$, tandis qu'on appelle fonction de seconde espèce la seconde $E(a,\varphi)=\int_0^\varphi\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$, qui est, comme nous l'avons vu, l'expression d'un arc d'ellipse.

On peut aussi partir des formules :

$$x=\frac{a}{\cos\theta}, \qquad y=b\operatorname{tang}\theta,$$

qui s'offrent plus immédiatement que celles de Legendre pour représenter les coordonnées de l'hyperbole. En comptant toujours les arcs à partir du sommet de la courbe, elles donnent :

$$T=\int_0^\theta\frac{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2}}{\cos^2\theta}\,d\theta,$$

et de l'identité :

$$D_\theta\left[\operatorname{tang}\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2}\right]=\frac{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2}}{\cos^2\theta}-\frac{b^2}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2}}+\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2},$$

on conclut ensuite : [1]

---

[1] Le terme algébrique $\operatorname{tang}\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2}$ dans cette nouvelle expression de l'arc de l'hyperbole représente le segment de tangente compris entre le point de contact et le point de rencontre avec l'axe des abscisses.

$$T = \operatorname{tang}\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2} + b^2\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2}} - \int_0^\theta \sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2}\,d\theta :$$

Voici donc deux expressions de la même quantité au moyen des variables φ et θ, qui sont liées par les relations suivantes :

$$\cos\theta = \frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}},$$

$$\sin\theta = \frac{b\sin\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}},$$

$$\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2} = \frac{b}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}.$$

En employant cette combinaison :

$$\operatorname{tang}\theta = b\operatorname{tang}\varphi,$$

on en conclut facilement : $$\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}},$$

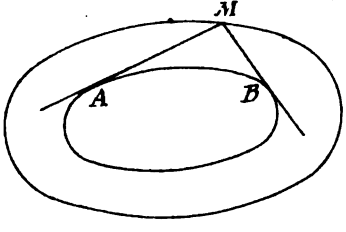
d'où : $$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}$$

puisqu'on a en même temps : $\theta = 0$ et $\varphi = 0$. Nous trouvons, par conséquent, en égalant les deux expressions de T, la relation :

$$\int_0^\theta \sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2}\,d\theta = \int_0^\varphi \sqrt{1-a^2\sin^2\varphi} + \operatorname{tang}\varphi\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2}$$

ou encore : $$\int_0^\theta \sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2}\,d\theta = \int_0^\varphi \sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi - \frac{a^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}.$$

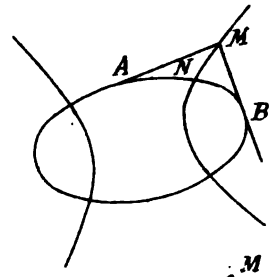
Que l'on considère donc une ellipse ayant l'unité pour grand axe, et la quantité a pour distance du centre au foyer ; la première intégrale sera la longueur d'un certain arc compté depuis l'extrémité du petit axe, la seconde, la longueur d'un autre arc ayant pour origine l'extrémité du grand axe ; or, on voit que leur différence représentée par le terme $\frac{a^2\sin^2\cos\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}$, peut s'obtenir géométriquement. Il suffit effectivement de construire la tangente au point de l'ellipse qui est déterminé par l'angle φ ; en projetant le centre sur la tangente, le segment compris entre le point de contact et cette projection donne la différence des deux arcs. Ce résultat a été découvert par un géomètre Italien, Fagnano di Fagnani [1], dont le nom doit être cité avec admiration comme ayant ouvert le premier la voie à la théorie des fonctions elliptiques. Mais voici des théorèmes plus généraux qui mettront en évidence ce qu'il y a d'entièrement nouveau et de caractéristique dans la nature des arcs d'ellipse.



Le premier a été découvert par Mgr. Graves, évêque anglican de Limerick, les suivants sont dus à M. Chasles.

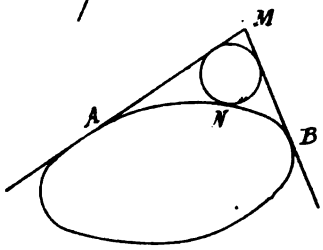
1° Considérant deux ellipses homofocales, si d'un point quelconque M de l'une d'elles on mène des tangentes MA, MB à l'autre, l'arc AB compris entre les points de contact diminué de la somme

(1) Fagnano. Produzioni matematiche, 1750.



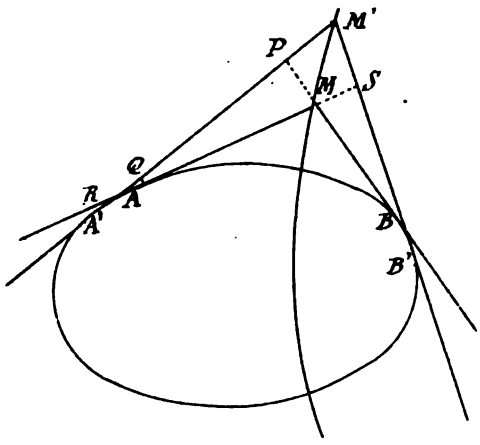
$AM + BM$ est une quantité constante.

2° Faisons la même construction en supposant le point M sur une hyperbole homofocale à l'ellipse, qui la rencontre en N; alors la différence des arcs NA et NB sera égale à la différence des tangentes MA et MB.



3° Soient enfin deux tangentes MA et MB, menées à l'ellipse par un point quelconque; si l'on construit un cercle tangent aux deux droites et à la courbe en N, la différence des arcs NA et NB sera encore égale à $MA - MB$.

Voici la démonstration du second théorème, d'après M. Chasles.



Considérons sur l'ellipse deux tangentes infiniment voisines en A et A'; soient M et M' les points où elles coupent l'hyperbole, et R leur point de rencontre. Nous observons qu'en projetant sur $A'M'$ les points M et A en P et Q, on a, aux infiniments petits près du second ordre: $RQ = RA$ et $QP = AM$.

La première relation montre d'abord que la corde de l'arc AA', et par conséquent cet arc lui-même est encore égal aux infiniments petits près du second ordre à: $A'R + RQ = A'Q$. Cela posé, j'envisage comme fonctions d'une même variable l'arc d'ellipse $NA = S$ et le segment de tangente $AM = t$, de sorte qu'en faisant croître cette variable de sa différentielle on passe du point A au point A', ce qui donnera: $NA' = S + ds$, $A'M' = t + dt$.

Or, ayant $A'M' = AQ + QP + PM'$, on conclura de notre seconde relation, $QP = AM = t$, celle-ci, à savoir:

$$dt = ds + PM'.$$

Soient maintenant MB et $M'B'$ les autres tangentes menées par les points M et M' à l'ellipse; si en désignant par B et B' les points de contact et par S' la projection de M sur $M'B'$, on fait:

$$NB = S_1, \quad BM = t_1;$$

nous aurons de même:

$$dt_1 = ds_1 + SM'.$$

Mais d'après la propriété de l'hyperbole homofocale, les angles de la tangente MM' avec les tangentes $M'A'$, $M'B'$ sont égaux; il en résulte que $PM' = SM'$, et par suite:

$$dt - dt_1 = ds - ds_1.$$

On en conclut: $$t - t_1 = S - S_1 + \text{const.}$$

et j'ajoute que la constante est nulle, car les deux arcs et les deux segments de la tangente

s'évanouissent en même temps quand on fait coïncider les points M et N.

Ces résultats font voir combien, par leur nature, les arcs d'ellipse diffèrent des arcs de cercle, aussi n'est-il pas possible de généraliser les fonctions circulaires en considérant, ainsi qu'il semblerait si naturel, l'abscisse et l'ordonnée d'un point de l'ellipse comme des fonctions de l'arc compté depuis une origine fixe jusqu'à ce point. Ce n'est donc pas la relation :

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} = \xi$$

qui conduit à une expression analogue à $x = \sin \xi$; il n'y a aucun lien entre cette condition et celle qui définit le sinus à savoir :

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \xi .$$

La véritable analogie à suivre s'obtient si l'on égale à une variable ξ, la fonction de première espèce :

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad , \text{ ou bien : } \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} ,$$

en faisant $x = \sin\varphi$, de sorte que c'est par la voie du calcul intégral et non de la géométrie qu'on est conduit aux nouvelles transcendantes qui ont, pris, sous le nom de fonctions elliptiques, une si grande place dans la science de notre temps. Les considérations élémentaires suivantes sur l'intégrale des fonctions rationnelles de la variable et du radical $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ sont les préliminaires de la théorie des fonctions elliptiques.

En premier lieu et en faisant suivant l'usage :

$$R(x) = (1-x^2)(1-k^2x^2) ,$$

nous remarquerons que si l'on représente la fonction placée sous le signe d'intégration par $f[x, \sqrt{R(x)}]$ on peut écrire :

$$f[x, \sqrt{R(x)}] = \frac{P + Q\sqrt{R(x)}}{R + S\sqrt{R(x)}} ,$$

P, Q, R, S étant des polynômes entiers en x.

Cela posé, multipliant haut et bas par $R - S\sqrt{R(x)}$, on aura : $\frac{G + H\sqrt{R(x)}}{R^2 - S^2R(x)}$, G et H étant des polynômes entiers, on aura : $A + \frac{B}{\sqrt{R(x)}}$, A et B étant deux fonctions rationnelles de x. Ceci s'applique d'ailleurs quel que soit le degré de $R(x)$; si ce degré dépasse 4, on a les intégrales dites hyperelliptiques.

Nous sommes maintenant amenés à considérer $\int \frac{B\,dx}{\sqrt{R(x)}}$, et nous poserons à cet effet : $B = \frac{P}{Q}$, P et Q étant deux polynômes entiers en x. Soit Q_1 ce que devient Q quand on change x en $-x$; on peut écrire : $B = \frac{PQ_1}{QQ_1}$; QQ_1 est une fonction de x^2 seulement, de sorte que l'intégrale proposée se partage en deux autres ; la première est de la forme :

$$\int \frac{xf(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} ,$$

f désigne toujours une fonction rationnelle. En posant $x^2 = t$, elle devient :

$$\frac{1}{2}\int \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(1-t)(1-k^2t)}},$$

et l'on voit qu'elle s'obtient sous forme explicite.

La deuxième intégrale à considérer est :

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

ou bien, si l'on fait encore $x^2=t$:

$$\int \frac{f(t)\,dt}{2\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}.$$

Elle se ramène, en décomposant $f(t)$ en éléments simples, à une combinaison linéaire d'intégrales qui rentre dans les deux types suivants :

$$\int \frac{t^n\,dt}{\sqrt{R(t)}} \quad \text{et} \quad \int \frac{dt}{(t-a)^n\sqrt{R(t)}},$$

où je fais dorénavant : $R(t)=t(1-t)(1-k^2t)=\alpha t+\beta t^2+\gamma t^3$.

Ceci posé, je dis que les intégrales du premier groupe s'expriment à l'aide de termes algébriques et des suivantes :

$$\int \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} \quad \text{et} \quad \int \frac{t\,dt}{\sqrt{R(t)}}$$

Pour obtenir cette réduction, j'emploierai, conformément à la méthode de Legendre, l'identité :

$$2D_t\left[t^n\sqrt{R(t)}\right]=\frac{(2n+1)\alpha t^n+(2n+2)\beta t^{n+1}+(2n+3)\gamma t^{n+2}}{\sqrt{R(t)}},$$

d'où l'on conclut :

$$2t^n\sqrt{R(t)}=(2n+1)\alpha\int\frac{t^n\,dt}{\sqrt{R(t)}}+(2n+2)\beta\int\frac{t^{n+1}\,dt}{\sqrt{R(t)}}+(2n+3)\gamma\int\frac{t^{n+2}\,dt}{\sqrt{R(t)}}.$$

Faisons $n=0$, on aura : $\int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{R(t)}}$ exprimée à l'aide d'un terme algébrique et des intégrales $\int\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$ et $\int\frac{t\,dt}{\sqrt{R(t)}}$. Continuant de proche en proche, en faisant $n=1$, $n=2$, ..., on parvient facilement à cette conséquence que $\int\frac{t^n\,dt}{\sqrt{R(t)}}$ s'exprime à l'aide d'un polynôme entier en t, multiplié par $\sqrt{R(t)}$ et des intégrales $\int\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$ et $\int\frac{t\,dt}{\sqrt{R(t)}}$: elles ont reçu la dénomination d'intégrales de première et de deuxième espèce.

Je dis maintenant que les intégrales du deuxième groupe s'expriment à l'aide de termes algébriques, de celles de première et deuxième espèce, et de la quantité $\int\frac{dt}{(t-a)\sqrt{R(t)}}$. En effet, nous avons :

$$2D_t\,\frac{\sqrt{R(t)}}{(t-a)^n}=\frac{(t-a)R(t)-2nR(t)}{(t-a)^{n+1}\sqrt{R(t)}},$$

ce qu'on peut écrire en ordonnant le numérateur suivant les puissances de $t-a$:

$$\frac{-2nR(a)-(2n-1)R'(a)(t-a)-(n-1)R''(a)(t-a)^2-(2n-3)\gamma(t-a)^3}{(t-a)^{n+1}\sqrt{R(t)}}.$$

Nous en conclurons, en posant $Z_n = \int \frac{dt}{(t-a)^n \sqrt{R(t)}}$, la formule de réduction :

$$\frac{2\sqrt{R(t)}}{(t-a)^n} = -2n\, i(a) Z_{n+1} - (2n-1) R(a) Z_n - (n-1) R''(a) Z_{n-1} - \left(2n-\tfrac{3}{2}\right) \gamma Z_{n-2}.$$

Pour $n=0$, le terme en Z_{n+1} disparaît ; il est donc impossible d'obtenir Z_1 à l'aide de Z et Z_{-1}, c'est-à-dire des intégrales de première et de seconde espèce. Mais en faisant successivement $n=1$, $n=2$, ..., on exprime Z_n de proche en proche à l'aide d'une fonction rationnelle de t, multipliée par $\sqrt{R(t)}$ et des intégrales Z_1, Z_0 et Z_{-1}. Dans le cas particulier où l'on aurait $R(a)=0$, on voit enfin, en faisant $n=1$ que Z_1 s'exprime elle-même à l'aide de Z_0 et Z_{-1}. L'intégrale

$$Z_1 = \int \frac{dt}{(t-a)\sqrt{R(t)}}$$

est dite intégrale de troisième espèce, et l'on donne à la constante a qui y entre le nom de paramètre.

Une conséquence importante de ces réductions c'est que toutes les fois qu'il sera possible d'exprimer à l'aide de fonctions algébriques une intégrale de la forme $\int f(t, \sqrt{R(t)})\, dt$, f étant une fonction rationnelle, on y parviendra par les opérations précédemment indiquées ; les coefficients des intégrales de première, deuxième et troisième espèce devront alors nécessairement s'évanouir. C'est ce qui a été établi par Abel et Liouville ; les résultats obtenus par ces illustres géomètres donnent donc ainsi la méthode qu'il faudra employer pour évaluer ces intégrales lorsqu'elles sont exprimables sous forme algébrique.

La question qui vient d'être traitée conduit à des résultats intéressants d'Algèbre et de Calcul Intégral. En voici quelques-uns :

Soit :
$$R(x) = (1-x^2)(1-k^2x^2).$$

On voit facilement, d'après ce qui précède, que l'on a :

$$\int \frac{(k^2x^2)^{n+1}\, dx}{\sqrt{R(x)}} = P\sqrt{R(x)} + A_n \int \frac{k^2x^2}{\sqrt{R(x)}} - B_n \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

P désignant un polynôme entier en x, A_n et B_n des constantes ; ces quantités se déterminent de la manière suivante :

Remarquons d'abord que l'on peut écrire :

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \sqrt{R(x)} \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^{2n+1}.$$

En effet, $\frac{1}{\sqrt{R(x)}}$ donne une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable, que l'on rencontre dans la théorie des polynômes de Legendre, et à laquelle il est facile d'arriver en appliquant la formule du binôme.

Ce développement étant intégré, on le multipliera par la série $\frac{1}{\sqrt{R(x)}}$. On aura de la sorte obtenu la nouvelle série $\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^{2n+1}$, le coefficient de x^{2n+1} est précisément le coefficient A_n cherché.

En second lieu, nous ferons semblablement :

$$\int_0^x \frac{k^2 x^2 dx}{\sqrt{R(x)}} = \sqrt{R(x)} \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n x^{2n+1} ;$$

cela étant, le coefficient de x^{2n+1}, dans la série du second membre sera le coefficient B_n cherché.

On peut dire encore que les quantités A_n et B_n satisfont l'une et l'autre à la loi de récurrence indiquée par l'égalité :

$$(2n+1)A_n - 2n(1+k^2)A_{n-1} + (2n-1)k^2 A_{n-2} = 0 .$$

Donc, en partant des deux premiers coefficients de chaque série on pourra obtenir tous les autres de proche en proche. Ces quantités A_n et B_n donnent lieu aussi à la relation :

$$B_n A_{n-1} - A_n B_{n-1} = \frac{k^{2n}}{2n+1} ,$$

dont la forme montre que les fractions continues algébriques doivent s'introduire ici tout naturellement. Posons en effet :

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} , \qquad J = \int_0^1 \frac{k^2 x^2 dx}{\sqrt{R(x)}} ,$$

K étant la fonction complète de première espèce, et J la fonction complète de deuxième espèce, telle que la considère M^r Weierstrass. On a cette expression :

$$\frac{J}{K} = \cfrac{k^2}{2(1+k^2) - \cfrac{9k^2}{4(1+k^2) - \cfrac{25k^2}{6(1+k^2) - \cdots}}}$$

et les réduites successives de la fraction continue sont les quantités $\frac{B_1}{A_1}$, $\frac{B_2}{A_2}$, etc.

On pouvait, d'ailleurs, voir à priori, comme conséquence immédiate de l'équation :

$$\int_0^x \frac{(k^2x^2)^{n+1} dx}{\sqrt{R(x)}} = P\sqrt{R(x)} + A_n \int_0^x \frac{k^2 dx}{\sqrt{R(x)}} - B_n \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

que $\frac{J}{K}$ est représenté aux termes près d'ordre $n+1$ en k^2 par le quotient $\frac{B_n}{A_n}$.

Il vient, en effet, si l'on pose $x = 1$:

$$\int_0^1 \frac{(k^2x^2)^{n+1} dx}{\sqrt{R(x)}} = A_n J - B_n K ,$$

d'où :

$$\frac{J}{K} - \frac{B_n}{A_n} = \frac{1}{A_n K} \int_0^1 \frac{(k^2x^2)^{n+1} dx}{\sqrt{R(x)}} ,$$

et l'on voit que le développement en série du second membre suivant les puissances croissantes de k^2, commence bien par un terme en $(k^2)^{n+1}$.

Quant au polynôme P, nous allons, pour l'obtenir, suivre une méthode souvent employée par M. Tchebycheff.

Écrivons :

$$\frac{1}{\sqrt{R(x)}} \int_0^x \frac{(k^2x^2)^{n+1} dx}{\sqrt{R(x)}} = P + \frac{A_n}{\sqrt{R(x)}} \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{R(x)}} - \frac{B_n}{\sqrt{R(x)}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} ,$$

et développons le premier membre en série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x.

La partie entière de cette série sera le polynôme P; il suffira pour le prouver de montrer que les développements des deux derniers termes du second membre ne peuvent conduire à des termes renfermant des puissances positives de la variable; or cette propriété est manifeste, le radical $\frac{1}{\sqrt{R(x)}}$ donnant une série qui commence par un terme en $\frac{1}{x^2}$.

IV^ème Leçon.

Les considérations précédentes nous ont conduit à ce résultat qu'en désignant par H une fonction rationnelle quelconque de x^2, en posant : $R(x) = (1-x^2)(1-k^2x^2)$, on a en général :

$$\int \frac{H\,dx}{\sqrt{R(x)}} = K\sqrt{R(x)} + M\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + N\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \Sigma \int \frac{A\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{R(x)}}$$

Dans cette expression de l'intégrale, K représente une fonction rationnelle impaire de la variable, M et N des coefficients constants, ainsi que les quantités A. On voit ainsi que dans le cas où ces diverses constantes s'évanouissent, l'intégrale est donnée par le terme $K\sqrt{R(x)}$; or il a été établi par Abel et M. Liouville que ces cas sont les seuls où il soit possible d'obtenir l'intégrale en fonction algébrique de la variable. On remarquera, en particulier, que dans les intégrales de première, de seconde et de troisième espèce, les quantités :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{R(x)}}$$

ne peuvent s'exprimer de cette manière et sont, par conséquent, des transcendantes. Mais à l'égard des deux premières il y a plus, et M. Liouville a établi dans le "Journal de l'École Polytechnique (23^ème Cahier)" que ces transcendantes sont d'espèce supérieure et ne peuvent s'obtenir en termes finis à l'aide des signes algébriques exponentiels et logarithmiques. Il y a cependant des cas où l'intégrale $\int \frac{H\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ s'obtient sous forme explicite, en entendant ainsi des combinaisons de fonctions algébriques exponentielles et logarithmiques en nombre fini. A ce point de vue, il a été démontré par Abel et M. Liouville que l'expression la plus générale de l'intégrale était alors donnée par la formule suivante :

$$\int \frac{H\,dx}{\sqrt{R(x)}} = K\sqrt{R(x)} + \Sigma A \log\left(P + Q\sqrt{R(x)}\right),$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de x, et les coefficients A des constantes. C'est une question importante et difficile que de reconnaître si une intégrale donnée s'exprime de cette manière; elle a appelé l'attention d'Abel et a été l'objet d'un travail de M. Tchebicheff, on ne peut plus remarquable par la profondeur et l'originalité de la méthode [1]. J'indique seulement ces

[1] Sur l'intégration de la différentielle $\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}$. Journal de M. Liouville. 2^e Série. T. IX. p. 225.

belles recherches et je me bornerai à donner quelques exemples où les intégrales se ramènent simplement à celles des fonctions rationnelles.

Un premier cas est la quantité :

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

où $f(x^2)$ est une fonction rationnelle telle qu'on ait :

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)$$

Soit, en effet :

$$y = \frac{\sqrt{R(x)}}{x},$$

d'où
$$k^2x^4 - (1+k^2+y^2)\,x^2 + 1 = 0,$$

et par conséquent :
$$x^2 = \frac{1+k^2+y^2+\sqrt{R_1(y)}}{2k^2}$$

en posant :

$$R_1(y) = (1+k^2+y^2)^2 - 4k^2;$$

$R_1(y)$ est donc un polynôme analogue à $R(x)$. Nous avons pris pour x^2 une des racines de l'équation écrite plus haut. Or le produit des deux racines de cette équation est $\frac{1}{k^2}$, donc :

$$\frac{1}{k^2x^2} = \frac{1+k^2+y^2-\sqrt{R_1(y)}}{2k^2}.$$

Maintenant il résulte de l'expression de x^2 à l'aide de y, que l'on aura :

$$f(x^2) = G + H\sqrt{R_1(y)},$$

G et H étant des fonctions rationnelles de y.

Si l'on change x^2 en $\frac{1}{k^2x^2}$, ceci revient, d'après ce qui précède, à changer le signe du radical $\sqrt{R_1(y)}$. Donc :

$$f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right) = G - H\sqrt{R_1(y)};$$

et comme, par hypothèse, on a : $f(x^2) + f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right) = 0$, on en déduit $G = 0$, et par suite simplement :

$$f(x^2) = H\sqrt{R_1(y)}.$$

En différentiant maintenant l'équation :

$$k^2x^4 - (1+k^2+y^2)\,x^2 + 1 = 0$$

on trouve :

$$dx\,[2k^2x^3 - (1+k^2+y^2)\,x] - yx^2\,dy = 0,$$

puis :
$$dx\,[2k^2x^2 - (1+k^2+y^2)] = xy\,dy,$$

ou simplement :
$$dx\sqrt{R_1(y)} = dy\sqrt{R(x)},$$

et finalement :
$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{R_1(y)}}.$$

L'intégrale demandée devient donc $\int H dy$, ainsi que nous l'avions annoncé.

Voici encore deux réductions analogues que nous allons indiquer:

La différentielle $\frac{f(x^2)dx}{\sqrt{R(x)}}$ se ramènera toujours à une différentielle rationnelle si l'on a :

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1-k^2x^2}{k^2-k^2x^2}\right)$$

ou encore

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}\right).$$

Dans le premier cas on posera :

$$y = \frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

et dans le second :

$$y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Soit pour abréger :

$$R_2(y) = (1+y^2)^2 - 4k^2y^2,$$
$$R_3(y) = (1+k^2y^2)^2 - 4y^2.$$

Ces substitutions donnent les relations suivantes, qui appartiennent à la transformation du second ordre des fonctions elliptiques, à savoir :

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{R_2(y)}},$$
$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{R_3(y)}}.$$

Je m'y arrêterai un moment pour tirer de la dernière une conséquence intéressante.

Soit : $z = (1+k')y$, et $l = \frac{1-k'}{1+k'}$; je remarque que si l'on écrit $R(x,k)$ au lieu de $R(x)$, afin de mettre le module en évidence, on aura :

$$\frac{dz}{\sqrt{R(z,l)}} = \frac{(1+k')dx}{\sqrt{R(x,k)}}$$

et par conséquent :

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z,l)}} = (1+k')\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x,k)}},$$

attendu que z est nul pour $x=0$. Joignons à cette relation celle qui concerne les fonctions de seconde espèce ; et employons à cet effet l'identité suivante :

$$D_x\left[\frac{x\sqrt{R(x,k)}}{1-k^2x^2}\right] = \frac{k^2x^2(1-x^2)}{(1-k^2x^2)\sqrt{R(x,k)}} - \frac{2x^2}{\sqrt{R(x,k)}} + \frac{1}{\sqrt{R(x,k)}}.$$

Si l'on observe que le terme

$$\frac{k^2x^2(1-x^2)}{(1-k^2x^2)\sqrt{R(x,k)}}$$

peut être remplacé par $\frac{k^2z^2}{(1+k')^3\sqrt{R(z,l)}} \cdot \frac{dz}{dx}$, on en tire en intégrant à partir de $x=0$, la relation :

$$\frac{x\sqrt{R(x,k)}}{1-k^2x^2} = \frac{k^2}{(1+k')^3}\int_0^z \frac{z^2dz}{\sqrt{R(z,l)}} - 2\int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{R(x,k)}} + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x,k)}}$$

que j'écrirai sous cette autre forme :

$$\int_0^z \frac{l^2z^2dz}{\sqrt{R(z,l)}} = \frac{2}{1+k'}\int_0^x \frac{k^2x^2dx}{\sqrt{R(x,k)}} - (1-k')\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x,k)}} + (1-k')\frac{x\sqrt{R(x,k)}}{1-k^2x^2}.$$

Ce résultat est d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques, mais en ce moment j'ai seulement en vue d'en déduire la proposition célèbre de Landen, qui donne l'expression d'un arc d'hyperbole par deux arcs d'ellipse. Retranchons à cet effet cette équation de celle qui concerne les intégrales de première espèce :

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z,l)}} = (1+k')\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x,k)}}$$

il vient après une transformation facile :

$$\int_0^z \sqrt{\frac{1-l^2z^2}{1-z^2}}\,dz = \frac{2}{1+k'}\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx + \frac{2k'}{1+k'}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x,k)}} - (1-k')\frac{x\sqrt{R(x,k)}}{1-k^2x^2}.$$

Or, en rappelant la formule de Legendre :

$$Y = \operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi} + b^2\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} - \int_0^\varphi \sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

en posant $\sin\varphi = x$, puis $a = k$, et par conséquent $b = k'$, de sorte qu'elle devienne :

$$Y = \frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + k'^2\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x,k)}} - \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx ;$$

on obtient par l'élimination de l'intégrale de première espèce :

$$Y = \frac{1}{2}k'(1+k')\int_0^z \sqrt{\frac{1-l^2z^2}{1-z^2}}\,dz - k'\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx + x\sqrt{R(x,k)}\left[\frac{1}{1-x^2} + \frac{k^2k'}{2(1-k^2x^2)}\right].$$

« Nous remarquerons en terminant ce sujet que l'expression précédemment obtenue pour l'intégrale $\int \frac{H\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ est susceptible de généralisation. Le procédé de calcul que nous avons employé s'étend, en effet, et sans aucun changement au cas où $R(x)$, au lieu d'être seulement du 4e degré, est un polynôme de degré quelconque μ. On trouve ainsi que H désignant toujours une fonction rationnelle quelconque de la variable, on a :

$$\int \frac{H\,dx}{\sqrt{R(x)}} = K\sqrt{R(x)} + M_0\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + M_1\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots + M_{\mu-2}\int \frac{x^{\mu-2}dx}{\sqrt{R(x)}} + \Sigma\int \frac{A\,dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}}.$$

Dans cette formule $M_0, M_1, \ldots M_{\mu-2}$ et A désignent des constantes ; K est une fonction rationnelle de x, et les quantités $x-a$ qui figurent dans les intégrales $\int \frac{A\,dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}}$ sont les divers facteurs qui entrent dans le dénominateur de H ; au premier degré on a un degré quelconque.

Considérons, par exemple, l'arc σ d'une courbe unicursale donnée par les équations :

$$x = \frac{V}{U}, \qquad y = \frac{W}{U},$$

où U, V, W, sont les polynômes entiers en t ; si l'on fait pour abréger :

$$R(t) = (V'U - U'V)^2 + (W'U - U'W)^2$$

on aura l'intégrale :

$$\sigma = \int \frac{\sqrt{R(t)}}{U^2}\, dt$$

que je me propose de mettre sous la forme qui vient d'être indiquée.

Remarquons d'abord qu'on peut écrire :

$$R = (V'U - U'V)^2 + (W'U - U'W)^2 = AU' + BU$$

$$\tfrac{1}{2} R' = (V'U - U'V)(V''U - U''V) + (W'U - U'W)(W''U - U''W) = AU'' + CU,$$

en désignant par A, B, C, des polynômes entiers en t. Cela étant, je considère le développement en fraction continue de $\frac{U'}{U}$, je forme l'avant dernière des réduites, $\frac{N}{P}$, qui donnera la relation

$$\frac{U'}{U} - \frac{N}{P} = \frac{\varepsilon}{PU}, \quad \text{c'est-à-dire :} \quad PU' - NU = \varepsilon, \quad \varepsilon \text{ étant } \pm 1.$$

Cette condition fait voir qu'en ajoutant la quantité $\frac{\varepsilon\sqrt{R}}{U^2}$ aux deux membres de l'identité suivante :

$$D_t\left[\frac{P\sqrt{R}}{U}\right] = \frac{P'U - PU'}{U^2}\sqrt{R} + \frac{PR'}{2U\sqrt{R}}$$

elle devient :

$$D_t\left[\frac{P\sqrt{R}}{U}\right] + \frac{\varepsilon\sqrt{R}}{U^2} = \frac{P' - N}{U}\sqrt{R} + \frac{PR'}{2U\sqrt{R}}$$

Remarquons ensuite que l'on a, au moyen des valeurs de R et $\frac{1}{2}R'$:

$$(P' - N)R + \tfrac{1}{2}PR' = (P' - N)(AU' + BU) + P(AU'' + CU)$$
$$= [(P' - N)U' + PU'']A + [(P' - Q)B + PC]U,$$

et qu'en différentiant l'équation : $PU' - NU = 1$, on obtient :

$$(P' - N)U' + PU'' = N'U$$

de sorte que dans le second membre le premier terme contient comme le second le facteur U. Il en résulte que nous pouvons écrire :

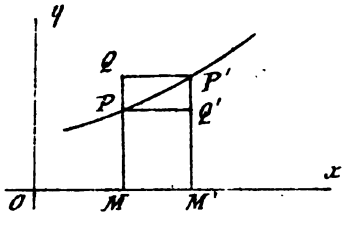
$$D_t\left[\frac{P\sqrt{R}}{U}\right] + \frac{\varepsilon\sqrt{R}}{U^2} = \frac{NA + (P' - N)B + PC}{\sqrt{R}};$$

on a par conséquent pour l'arc des courbes unicursales cette expression :

$$\sigma = \int \frac{\sqrt{R}}{U^2}\, dt = -\frac{\varepsilon P\sqrt{R}}{U} + \int \frac{N'A + P' - N)B + PC}{\sqrt{R}}\, dt,$$

dans laquelle n'entre aucune intégrale de troisième espèce, du type : $\int \frac{dt}{(t-a)\sqrt{R}}$.

Volume des corps de révolution.



Soit $y = f(x)$ l'équation d'une courbe donnée en coordonnées rectangulaires ; je dis que le volume engendré par le segment $MM'PP'$ tournant autour de l'axe Ox, et dont la base $MM' = dx$, est égal à $\pi \overline{MP}^2 dx$ aux infiniments petits près du second ordre.

Menons, en effet, par les points P et P' des parallèles à l'axe de manière à comprendre le segment entre les rectangles MPM'Q', MQM'P'. Le volume engendré par le segment sera donc compris entre les deux cylindres engendrés par les rectangles, qui étant de même hauteur, sont entre eux dans le rapport des bases. Or ce rapport est à la limite égal à l'unité, ce qui démontre la proposition annoncée. On en conclut pour le volume engendré par le segment compris entre deux ordonnées, qui correspondent aux abscisses quelconques a et b, cette expression :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx .$$

L'application de cette formule à la sphère et à l'ellipsoïde de révolution est immédiate.

Surface des corps de révolution.

Pour obtenir l'aire de la surface engendrée par la révolution de la courbe que nous venons de considérer, nous la considérerons comme la limite de la somme des aires des troncs de cône engendrés par les côtés d'un polygone infinitésimal inscrit. Soit PP' l'un de ces côtés. L'élément d'aire relatif à ce côté sera :

$$\frac{1}{2}(\text{circonf. } MP + \text{circonf. } M'P')\, PP' = 2\pi\left(y + \frac{1}{2}dy\right) ds ,$$

ou simplement $2\pi y\, ds$ aux infiniments petits près du second ordre. L'aire engendrée par l'arc de courbe compris entre les ordonnées qui répondent aux abscisses a et b sera donc :

$$S = 2\pi \int_a^b y\, ds .$$

Soit comme exemple l'ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Nous aurons : $$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad ds = dx\,\frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2 y} ;$$

donc, $$y\, ds = \frac{b}{a}\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}\, . dx .$$

Soit en premier lieu $a > b$, de sorte que l'ellipsoïde ait été engendré par l'ellipse tournant autour de son grand axe, on écrira en introduisant la quantité $a^2 - b^2 = c^2$:

$$S = \frac{2\pi bc}{a^2}\int dx \sqrt{\frac{a^4}{c^2} - x^2}$$

ou plus simplement, si l'on fait $a^2 = cd$:

$$S = \frac{2\pi b}{d}\int \sqrt{d^2 - x^2}\, dx ;$$

on est donc ramené à l'intégrale obtenue pour l'aire d'un segment de cercle.

En prenant zéro pour limite inférieure, on a par conséquent :

$$S = \frac{2\pi b}{d}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{d^2 - x^2} + \frac{d^2}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{d}\right).$$

Si l'on suppose, en second lieu, $b > a$, l'ellipsoïde est de révolution autour du petit axe,

et en posant $b^2 - a^2 = c^2$, on a :

$$S = \frac{2\pi b}{a^2} \int dx \sqrt{a^4 + c^2 x^2}$$

ou bien :

$$S = \frac{2\pi bc}{a^2} \int dx \sqrt{\frac{a^4}{c^2} + x^2} ;$$

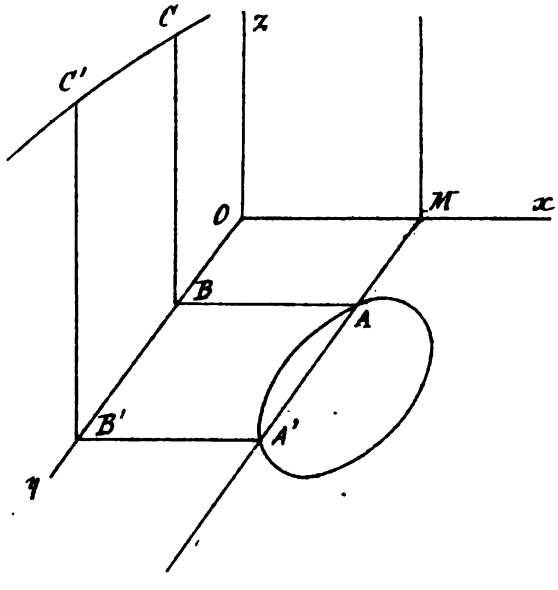
ce qui conduit, comme on le voit, à l'intégrale dont dépend la rectification de la parabole ; on a par suite, en prenant zéro pour limite inférieure :

$$S = \frac{\pi b x \sqrt{a^4 + c^2 x^2}}{a^2} + \frac{\pi a^2 b}{c} \log. \frac{cx + \sqrt{a^4 + c^2 x^2}}{a^2}.$$

Volumes des corps limités par une surface quelconque.

On sait comment la Géométrie élémentaire donne la notion des intégrales définies par la considération des quadratures. Nous allons voir maintenant grandir encore le rôle important qu'elle joue dans le Calcul Intégral : la détermination des volumes limités par des surfaces quelconques va nous conduire, en effet, à la notion des Intégrales doubles.

Soit par rapport à trois axes coordonnés rectangulaires $z = f(x, y)$ l'équation d'une surface quelconque ; nous nous proposons d'évaluer le volume compris entre le plan des xy, cette surface et un cylindre parallèle à l'axe des z, dont la trace $\varphi(x, y) = 0$ soit une courbe fermée, et telle qu'à toute valeur $x = OM$ de l'abscisse correspondent deux ordonnées : $y = AM$, $y_1 = A'M$.



A cet effet, coupons le solide par le plan $x = OM$, figurons sur le plan des xy en $BCC'B'$ l'intersection ainsi obtenue qui s'y projette en véritable grandeur.

Nous évaluerons d'abord l'aire de la courbe $z = f(OM, y)$, est représentée sur la figure par $BCC'B'$, B et B' étant les projections sur Oy de A et A'. On obtiendra ainsi l'intégrale définie :

$$\int_{AM}^{A'M} f(OM, y)\, dy,$$

où l'on suppose que la variable x qui entre dans OM, AM, $A'M$, est constante.

Faisons, pour plus de clarté :

$$y = AM = \theta(x) \quad , \quad y_1 = A'M = \theta_1(x) ;$$

nous poserons :

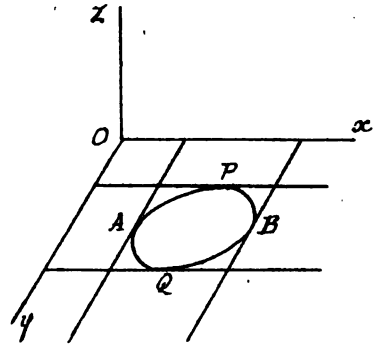
$$BCC'B' = \int_{AM}^{A'M} f(OM, y)\, dy = \int_{\theta(x)}^{\theta_1(x)} f(x, y)\, dy = \Theta(x).$$

Cela étant, si l'on partage le volume proposé en éléments infiniment petits par des plans perpendiculaires à Ox, et dont la distance constante soit dx, on pourra à ces éléments

substituer des cylindres ayant pour bases les sections faites par ces plans, pour hauteur commune dx, et dont les volumes seront représentés par $\Theta(x)\,dx$. La somme de ces éléments entre deux limites $x=a$, $x=b$, c'est-à-dire l'intégrale $\int_a^b \Theta(x)\,dx$ donnera ainsi la portion du solide proposé comprise entre les plans $x=a$, $x=b$, et nous obtiendrons le volume entier V en prenant pour a et b les abscisses des points extrêmes de la courbe $\varphi(x,y)=0$, où la tangente est parallèle à Oy. On a donc cette expression :

$$V=\int_a^b \Theta(x)\,dx=\int_a^b dx\int_{\theta(x)}^{\theta_1(x)} f(x,y)\,dy.$$

La Géométrie nous donne ainsi une notion analytique nouvelle : c'est celle de l'intégrale double d'une fonction de deux variables $\iint f(x,y)\,dx\,dy$, calculée en supposant que ces variables x et y représentent tous les points de l'intérieur d'une courbe fermée $\varphi(x,y)=0$. Nous la rapprocherons de la notion élémentaire des intégrales simples par la considération suivante :



Circonscrivons à la courbe $\varphi(x,y)=0$ un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes. Décomposons ce rectangle en rectangles infiniment petits dont les dimensions sont dx et dy. L'intégrale $\iint f(x,y)\,dx\,dy$ sera la somme des parallélipipèdes infiniment petits ayant ces rectangles pour bases et pour hauteurs les ordonnées de la surface correspondante ; cette somme étant le volume que nous nous sommes proposé tout d'abord d'évaluer.

Nous appliquerons, en premier lieu, ce résultat au cas où la courbe $\varphi(x,y)=0$ devient un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes ; on a alors :

$$\varphi(x,y)=(x-a)(x-a')(y-b)(y-b');$$

nous supposerons $a<a'$, $b<b'$.

Cela étant, je prends l'équation de la surface sous la forme suivante : $z=D_{xy}^2\,\Phi(x,y)$; on aura donc en premier lieu :

$$\begin{aligned}\Theta(x)&=\int_b^{b'} D_{xy}^2\,\Phi(x,y)\,dy\\&=\Phi'_x(x,b')-\Phi'_x(x,b),\end{aligned}$$

et ensuite :

$$\begin{aligned}V&=\int_a^{a'}\Theta(x)\,dx\\&=\Phi(a',b')-\Phi(a',b)-\Phi(a,b')+\Phi(a,b).\end{aligned}$$

Supposons maintenant que l'on ait :

$$z=\psi(x)\,\chi(y),$$

c'est-à-dire que z soit le produit d'une fonction d'x par une fonction d'y, on aura d'abord :

$$\begin{aligned}\Theta(x)&=\int_b^{b'}\psi(x\chi(y)\,dy\\&=\psi(x)\int_b^{b'}\chi(y)\,dy,\end{aligned}$$

et par conséquent : $$V=\int_a^{a'}\Theta(x)\,dx=\Big(\int_a^{a'}\psi(x)\,dx\Big)\Big(\int_b^{b'}\chi(y)\,dy\Big).$$

Vème Leçon.

La notion de l'intégrale double $\iint F(x,y)\,dx\,dy$, prise relativement à la courbe fermée $F(x,y)=0$, nous a été donnée par la Géométrie la plus élémentaire. Elle est plus complexe que celle de l'intégrale simple ; il y a cependant un cas particulier où, sous un point de vue important, ces deux notions se rapprochent, c'est lorsque la courbe $F(x,y)=0$ devient un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes. L'intégrale s'écrit alors :

$$J=\int_a^b dx\int_b^{b'} f(x,y)\,dy,$$

et nous allons montrer que lorsqu'elle ne peut pas s'exprimer sous forme explicite, on peut en obtenir des valeurs approchées sous forme de développements en série.

Soit à cet effet : $a'=a+h$, $b'=b+k$,

de sorte que l'on ait :

$$J=\int_a^{a+h} dx\int_b^{b+k} f(x,y)\,dy.$$

Nous admettrons que $f(x,y)\,dx\,dy$ soit développable en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $x-a$ et $y-b$; à l'aide de la formule de Taylor dans le cas de deux variables, et nous poserons :

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{x-a}{1}\frac{df(a,b)}{da}+\frac{y-b}{1}\frac{df(a,b)}{db}+\cdots\cdots$$

le terme général de cette série étant :

$$\frac{(x-a)^m}{1.2\ldots\ldots m}\quad\frac{(y-b)^n}{1.2\ldots\ldots n}\quad\frac{d^{m+n}f}{da^m\,db^n}.$$

On est ainsi ramené à une somme d'intégrales de la forme :

$$\int_a^{a+h} dx\int_b^{b+k}\frac{(x-a)^m}{1.2\ldots\ldots m}\,\frac{(y-b)^n}{1.2\ldots\ldots n}\,\frac{d^{m+n}f}{da^m\,db^n}\,dy,$$

qui se calculent facilement parce que le signe $\iint$ porte sur le produit d'une fonction de x par une fonction de y, et l'on obtient cette formule :

$$J=\Sigma\,\frac{h^{m+1}.k^{m+1}}{1.2\ldots.(m+1).\,1.2\ldots.(n+1)}\,\frac{d^{m+n}f(a,b)}{da^m\,db^n},$$

où les nombres entiers m et n prennent toutes les valeurs de zéro à l'infini.

En nous bornant aux trois premiers termes seulement, nous avons :

$$J=hk.f(a,b)+\frac{h^2k}{2}\frac{df}{da}+\frac{hk^2}{2}\frac{df}{db}$$

$$=hk\left[f(a,b)+\frac{h}{2}\frac{df}{da}+\frac{k}{2}\frac{df}{db}\right],$$

et l'on peut remarquer que l'intégrale double J est égale, aux termes près du quatrième ordre en h et k, à la quantité $hk\,f\left(a+\frac{h}{2},\,b+\frac{k}{2}\right)$. C'est un résultat que l'on applique dans beaucoup de circonstances

Si les quantités h et k sont trop grandes pour que l'on ait des développements suffisamment convergents, on partage l'intégrale en plusieurs autres, et l'on applique la formule à chacune d'elles; ce qui revient géométriquement à diviser le rectangle total dans les limites duquel on prend l'intégrale double, en plusieurs autres rectangles plus petits.

Ces procédés pour le calcul approché des intégrales doubles dont on fait usage dans la pratique, sont analogues à ceux qu'on emploie pour les intégrales simples, mais le rapprochement que nous voulons établir entre les deux genres de quantité sera plus complétement justifié par la remarque suivante :

Je rappelle à ces effets la formule d'approximation que Gauss a donnée pour l'intégrale simple :

$$J = \int_a^{a+h} f(x)\,dx.$$

Soit :

$$F(t) = \frac{D_t^{\mu}[t^{\mu}(t-1)^{\mu}]}{1.2.....\mu};$$

désignons par t_1, t_2, ... t_μ, les racines de l'équation $F(t) = 0$, qui sont toutes réelles et comprises entre zéro et l'unité, soit aussi :

$$T_i = \frac{1}{(t_i - t_i^2)\,F'^2(t_i)},$$

on aura :

$$J = h\left[T_1 f(a+ht_1) + T_2 f(a+ht_2) + \cdots\cdots + T_\mu f(a+ht_\mu)\right];$$

on peut abréger :

$$J = h\,\Sigma\left[T_i f(a+ht_i)\right].$$

Considérant ensuite les intégrales doubles, en faisant :

$$J = \int_a^{a+h} dx \int_b^{b+k} f(x,y)\,dy$$

nous allons établir la formule semblable :

$$J = hk\,\Sigma\left[T_i T_j f(a+ht_i,\ b+kt_j)\right]$$
$$i = 1,2,.....\mu,$$
$$j = 1,2,.....\mu.$$

Développons, en effet, cette expression suivant les puissances croissantes de h et k, on trouve pour le coefficient de $h^{m+1}k^{n+1}$, la quantité :

$$\frac{1}{1.2....m\ \ 1.2.....n}\,\frac{d^{m+n}f(a,b)}{da^m\,db^n}\,\Sigma\left[T_i T_j t_i^m t_j^n\right]$$

Or on a la relation suivante sur laquelle repose la formule de Gauss et que j'admets ici, à savoir :

$$\sum_1^{\mu} i\ \left[T_i t_i^m\right] = \frac{1}{m+1},$$

l'entier m étant l'un des membres de la suite, $0, 1, 2, \ldots\ldots 2\mu-1$.

Multiplions membre à membre cette équation avec l'équation semblable :

$$\sum_1^{\mu} ij\ \left[T_j t_j^n\right] = \frac{1}{n+1},$$

on obtiendra ainsi :

$$\Sigma\,[T_i\,T_j\,t_i^m\,t_j^n] = \frac{1}{(m+1)(n+1)}$$
$$i = 1, 2, \ldots\ldots \mu,$$
$$j = 1, 2, \ldots\ldots \mu.$$

Nous voyons donc que dans le développement considéré, le coefficient de $h^{m+1}k^{n+1}$ devient simplement :

$$\frac{1}{1,2\ldots\ldots m+1 \,.\, 1,2\ldots\ldots n+1}\,\frac{d^{m+n}f(a,b)}{da^m\,db^n},$$

lorsque m et n sont compris dans la suite $0, 1, 2, \ldots\ldots 2\mu-1$.

On est parvenu tout-à-l'heure pour l'intégrale double à la série :

$$J = \Sigma\,\frac{h^{m+1}k^{n+1}}{1,2,\ldots\ldots m+1\,.\,1,2,\ldots\ldots n+1}\,\frac{d^{m+n}f(a,b)}{da^m\,db^n},$$

par conséquent la formule d'approximation, qui est l'extension de celle de Gauss, représente cette intégrale aux termes près de l'ordre $2\mu+1$ en h et en k ; elle en donnerait la valeur exacte en supposant la fonction $f(x,y)$ un polygone entier en x et y, de degré non supérieur à 2μ par rapport à chacune des variables.

Soit par exemple $\mu = 1$, on trouvera comme plus haut :

$$J = hk\,f\left(a+\frac{h}{2},\ b+\frac{k}{2}\right);$$

Supposons ensuite $\mu = 2$, ce qui donne : $F(t) = bt^2 - bt + 1$, d'où : $t_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$, $t_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$, puis $T_1 = \frac{1}{2}$, $T_2 = \frac{1}{2}$, nous obtiendrons cette expression fort simple :

$$J = \frac{hk}{4}\Big[f\left(a+\frac{3+\sqrt{3}}{6}h,\ b+\frac{3+\sqrt{3}}{6}k\right) + f\left(a+\frac{3-\sqrt{3}}{6}h,\ b+\frac{3+\sqrt{3}}{2}k\right)$$
$$+ f\left(a+\frac{3-\sqrt{3}}{6}h,\ b+\frac{3-\sqrt{3}}{6}k\right) + f\left(a+\frac{3+\sqrt{3}}{6}h,\ b+\frac{3-\sqrt{3}}{6}k\right)\Big].$$

J'indiquerai enfin le résultat relatif à l'approximation des intégrales de la forme :

$$J = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-1}^{+1} \frac{f(x,y)}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}}\,dy,$$

où l'on suppose : $f(x,y) = \Sigma\,A_{m,n}\,x^m y^n$, et qui se tire de la formule bien connue concernant l'intégrale simple $\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Soit d'abord : $x = \cos\varphi$, $y = \cos\psi$, et faisons pour abréger :

$$f(\cos\varphi, \cos\psi) = F(\varphi,\psi),$$

ce qui donne :

$$J = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} F(\varphi,\psi)\,d\psi;$$

la somme suivante :

$$\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^2 \Sigma\,F\left[\frac{(2i-1)\pi}{2\mu},\ \frac{(2j-1)\pi}{2\mu}\right],$$

où les entiers i et j prennent les valeurs $1, 2, \ldots\ldots \mu$, représente l'intégrale proposée,

en négligeant seulement les termes d'ordre $2\mu+1$ en x et en y, dans la fonction $f(x,y)$.

Nous allons maintenant, en revenant aux considérations générales, envisager le cas où le signe $\int\int$ porte sur la dérivée d'une fonction d'x et d'y par rapport à l'une de ces variables, et en premier lieu nous nous occuperons de l'expression suivante :

$$J = \int dx \int D_y f(x,y)\, dy ,$$

l'intégrale double se rapportant toujours à la courbe fermée $F(x,y)=0$.

En suivant la méthode exposée dans la leçon précédente, nous résoudrons cette équation par rapport à y, et nous supposerons qu'on en tire ces deux fonctions de x, à savoir :

$$y_0 = \theta(x) , \qquad y_1 = \theta_1(x) .$$

On aura donc cette expression :

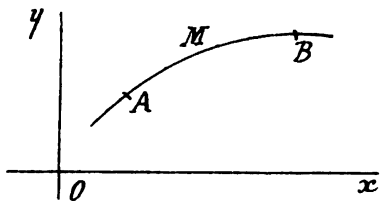
$$J = \int_a^b dx \int_{\theta(x)}^{\theta_1(x)} D_y f(x,y)\, dy ,$$

qui, en effectuant l'intégration par rapport à y, prend la forme suivante :

$$J = \int_a^b f(x,y_1)\, dx - \int_a^b f(x,y_0)\, dx .$$

Nous voyons ainsi s'offrir pour la valeur de l'intégrale double des intégrales simples de fonctions composées de deux autres ; cette circonstance va nous donner une notion analytique nouvelle, que nous allons exposer, en suivant les considérations employées par M. Karl Neumann, dans la théorie des fonctions abéliennes d'après Riemann.

Nous donnerons, en général, le nom d'intégrale curviligne à l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} f(x,y)\, dt$, f désignant une fonction quelconque de x et y, lorsque ces quantités sont exprimées en fonction de la variable t, par les formules : $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$.



Supposons tracée la courbe représentée par les équations $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, et soit AMB l'arc que l'on obtient quand on fait varier t de t_0 à t_1.

On voit que l'intégrale est la somme des valeurs de la fonction $f(x,y)\,dt$, x et y donnant la suite des points de la courbe, qu'on obtient quand t varie de t_0 à t_1 par degrés égaux à dt. Elle se rapporte donc à l'arc AMB, ce qui justifie la dénomination d'intégrale curviligne, et la manière dont on la représente, en indiquant le chemin parcouru par le point (x,y) quand t varie de t_0 à t_1.

Nous écrirons en conséquence :

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x,y)\, dt = (AMB) ,$$

et nous ferons sur cette formule une première remarque très-simple, mais d'une grande importance.

On a évidemment :

$$\int_{t_1}^{t_0} f(x,y)\, dt = (BMA) ,$$

la disposition des lettres indiquant le sens dans lequel est parcouru l'arc de courbe.

D'ailleurs $\int_{t_0}^{t_1} f(x,y)\, dt + \int_{t_1}^{t_0} f(x,y)\, dt = 0$,

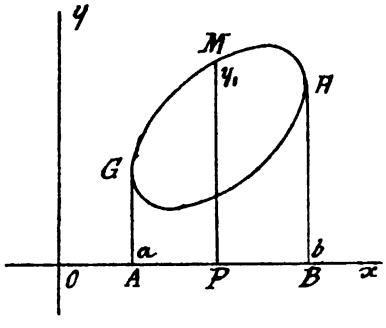
et la relation qui en résulte, à savoir :

$$(AMB)+(BMA)=0$$

montre que les intégrales curvilignes relatives à un même chemin parcouru successivement dans un certain sens, puis en sens opposé, sont égales et de signe contraire.

Appliquons ces notions à l'intégrale qui s'est offerte plus haut :

$$J = \int_a^b f(x, y_1)\,dx - \int_a^b f(x, y_0)\,dx .$$



L'équation $F(x, y) = 0$ représentant la courbe $GMHM'$, on a évidemment :

$$J = (GMH) - (GM'H),$$

ou, d'après la remarque précédente

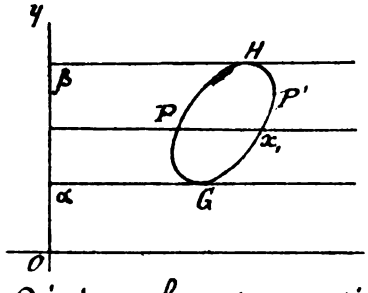
$$J = (GMH) + (HM'G).$$

J est donc simplement l'intégrale curviligne relative au contour total de la courbe $F(x, y) = 0$, décrite entièrement, une seule fois, et de façon à avoir l'espace illimité à gauche. Nous avons, par suite, pour l'expression du volume V que nous considérons une intégrale curviligne, qui se rapporte au contour total de la base du cylindre. L'avantage que nous procure cette nouvelle notion des intégrales curvilignes consiste donc en ce que le volume V peut s'exprimer à l'aide d'un seul terme au lieu de deux.

Considérons maintenant le cas où la fonction placée sous le signe $\iint$ est une dérivée partielle par rapport à x. Alors le volume considéré est donné par l'intégrale :

$$J = \int_\alpha^\beta dy \int_{x_0}^{x_1} D_x f(x, y)\,dx,$$

où $y = \alpha$, $y = \beta$ sont les deux tangentes à la base du cylindre $F(x, y) = 0$ parallèles à $0x$, en désignant par x_0 et x_1 les fonctions de y qui représentent les deux valeurs de l'abscisse pour une même valeur de l'ordonnée.



Ceci posé, la considération de la figure nous montre immédiatement que l'on a :

$$\begin{aligned} J &= \int_\alpha^\beta f(x_1, y)\,dy - \int_\alpha^\beta f(x_0, y)\,dy \\ &= (GP'H) - (GPH) \\ &= (GP'H) + (HPG) . \end{aligned}$$

L'usage est de représenter l'intégrale curviligne effectuée ainsi en décrivant le contour entier d'une courbe fermée S de la manière suivante :

$$J = \int_S f(x, y)\,dy .$$

Mais maintenant la base du cylindre est décrite de manière que l'espace illimité soit à droite, tandis que précédemment, quand la fonction sous le signe $\iint$ était de la forme $D_y f(x, y)$, l'espace illimité était à gauche.

Comme application de la formule que nous avons donnée pour l'évaluation des volumes, nous considérerons le cas fort simple d'un cylindre droit limité par un plan. Soit $F(x, y) = 0$ l'équation de la trace du cylindre, que nous supposons quelconque, et prenons le plan :

$$z = Ax + By + C$$

on aura :

$$V = \iint (Ax + By + C)\,dx\,dy ,$$

l'intégrale double étant prise pour tous les points de l'intérieur de la courbe $F(x,y)=0$.

Or, on peut écrire :

$$V = A\iint x\,dx\,dy + B\iint y\,dx\,dy + C\iint dx\,dy .$$

Soit donc S l'aire totale de la courbe fermée $F(x,y)=0$, et X et Y les coordonnées du centre de gravité de cette aire ; les relations connues donnent :

$$\iint dx\,dy = S ; \qquad \iint x\,dx\,dy = SX ; \qquad \iint y\,dx\,dy = SY ;$$

et l'on en conclut immédiatement :

$$V = S\,(AX + BY + C) .$$

En introduisant l'ordonnée Z du point du plan donné qui se projette au point (X,Y), il vient simplement :

$$V = S.Z .$$

Déterminons actuellement le volume limité par une surface fermée quelconque $F(x,y,z)=0$ que nous supposerons donner seulement deux valeurs de z en fonction de x et de y. Au lieu du cylindre quelconque que nous considérions précédemment, on prendra le cylindre circonscrit à cette surface parallèlement à Oz, et la différence des volumes qui se rapportent à la plus grande et à la plus petite valeur de z fournira le résultat cherché. Or l'équation de la trace du cylindre circonscrit sur Oxy s'obtient en éliminant z entre les relations $F(x,y,z)=0$ et $\frac{dF}{dz}=0$; il faudra ensuite calculer les valeurs limites de x qui correspondent aux points où la tangente à cette courbe est parallèle à Oy ; on y arrivera simplement en observant qu'aux points correspondants de la surface, le plan tangent est perpendiculaire à Ox ; on éliminera donc simplement y et z entre les équations : $F(x,y,z)=0$, $\frac{dF}{dz}=0$, $\frac{dF}{dy}=0$, et l'équation obtenue en x donnera les valeurs cherchées.

Considérons, par exemple, le volume de l'ellipsoïde à trois axes inégaux, et proposons-nous d'évaluer la portion de ce volume dans l'angle des coordonnées positives. L'équation de la surface étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 ;$$

la trace du cylindre sera :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

de sorte que nous aurons :

$$y_0 = 0 , \qquad y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} .$$

La quantité représentée par $\Theta(x)$ sera donc :

$$\Theta(x) = \int_0^{y_1} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dy$$

par conséquent $\frac{b}{c}\,\Theta(x)$ est l'aire du quart de cercle dont le rayon serait y_1.

Nous obtenons ainsi : $\Theta(x) = \frac{c}{b}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot y_1^2 = \frac{\pi bc}{4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$,

d'où : $V = \int_0^a \Theta(x)\,dx = \frac{\pi abc}{2.3}$. Le volume total de l'ellipsoïde est donc : $\frac{4}{3}\pi abc$.

Quadrature des surfaces courbes quelconques.

La définition de l'aire des surfaces courbes donne lieu à des difficultés qui ont été pour la première fois reconnues et signalées par M. Schwarz, dans une lettre adressée à M. Genocchi, il y a plusieurs années. L'éminent géomètre a bien voulu, à ma prière, revenir sur cette question en en faire le sujet de la note suivante :

Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe.

Communication faite à M. Charles Hermite par M. H. A. Schwarz de Göttingue.

Après avoir donné la définition suivante :

« Soit une portion de surface courbe terminée par un contour C ; nous nommerons « aire de cette surface la limite S vers laquelle tend l'aire d'une surface polyédrale inscrite for- « mée de faces triangulaires et terminée par un contour polygonal Γ ayant pour limite le « contour C (*). »

M. J. A. Serret continue ainsi : « Il faut démontrer que la limite S existe et qu'elle « est indépendante de la loi suivant laquelle décroissent les faces de la surface polyédrale in- « scrite. »

Si l'on voulait examiner la démonstration de cet énoncé essayée par l'illustre savant, on trouverait qu'elle donne lieu à des objections sérieuses, mais il n'est pas nécessaire de faire cet examen. On pourra démontrer, au contraire, que, si la surface donnée est une surface courbe et si le polyèdre inscrit n'est pas assujetti à certaines conditions additionnelles en restrictives (par exemple, que chaque face du polyèdre fasse un angle infiniment petit avec le plan tangent de la surface en un point infiniment voisin de cette face) l'aire de la surface du polyèdre inscrit peut surpasser une quantité donnée.

Il suffira, pour démontrer cette proposition, d'appeler l'attention des géomètres sur un seul exemple d'un tel polyèdre inscrit satisfaisant à toutes les conditions comprises dans l'énoncé de M. Serret, et dont l'aire peut surpasser une grandeur donnée.

Désignons par x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point, par u, v deux variables indépendantes, par r, h deux constantes, et par m, n, α des nombres entiers positifs.

Les équations :

$$x = r\cos u, \qquad y = r\sin u, \qquad z = v, \qquad 0 \leqq u \leqq 2\pi, \qquad 0 \leqq v \leqq h$$

représentent un cylindre droit dont la surface courbe a l'aire $2r\pi h$. A ce cylindre on peut inscrire un polyèdre à $4mn$ faces triangulaires qui satisfait aux conditions suivantes :

1°. — Tous les sommets de ce polyèdre sont donnés par les équations :

$$u = u' = \frac{2\mu\pi}{m}, \qquad v = v' = \frac{\nu h}{n}; \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots\ldots m-1, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots\ldots n$$

(*) J. A. Serret, Cours de calcul différentiel et intégral, tome second, page 296 de la première édition, page 293 de la deuxième édition.

$u = u'' = \frac{(2\mu+1)\pi}{m}$, $\quad v = v'' = \frac{(2\nu+1)h}{2n}$; $\quad \mu = 0, 1, 2, \ldots\ldots m-1$, $\quad \nu = 0, 1, 2, \ldots\ldots n-1$.

2° Toutes les faces triangulaires sont isocèles et congrues entre elles.

3° Les bases de tous ces triangles isocèles sont situées dans les plans $z = v'$, $z = v''$.

La base et la hauteur d'une face triangulaire ont les longueurs :

$$2r\sin\left(\frac{\pi}{m}\right), \quad \sqrt{r^2\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\right]^2 + \left(\frac{h}{2n}\right)^2}.$$

Par conséquent l'aire totale du polyèdre inscrit a la valeur :

$$S' = 4mnr\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\sqrt{4r^2\sin^4\left(\frac{\pi}{2m}\right) + \left(\frac{h}{2n}\right)^2}.$$

De cette formule on conclut :

1° Si l'on fait $n = am$, on a la limite cherchée $S = 2r\pi h$ pour $m = \infty$.

2° Si l'on fait $n = am^2$, on trouve que la limite S de l'aire S' est donnée par l'équation :

$$S = 2r\pi\sqrt{a^2r^2\pi^2 + h^2}.$$

Il est évident que la valeur de cette limite dépend du nombre a et qu'elle peut surpasser une grandeur donnée.

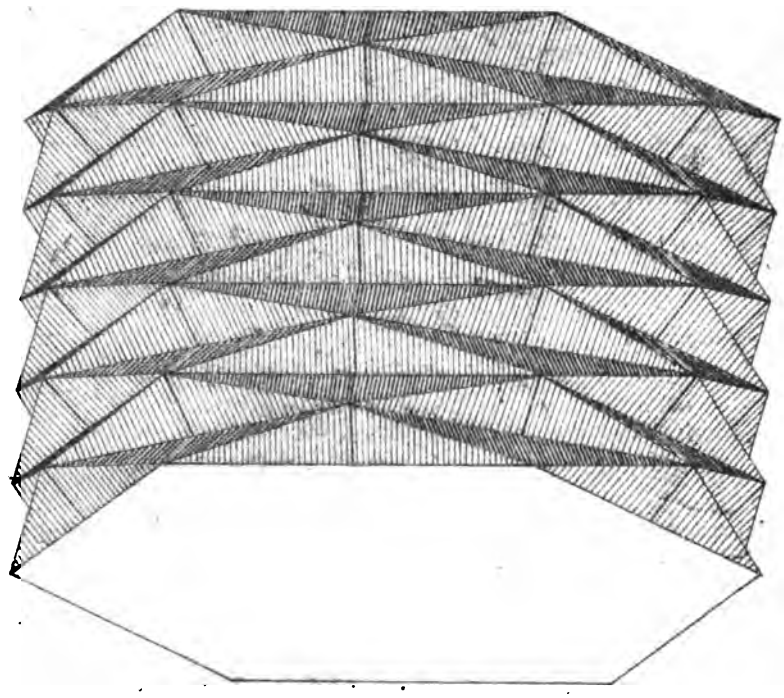
3° Si l'on fait $n = am^3$, on trouve que l'aire S' est plus grande que

$$8r^2m^4\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2m}\right).$$

Dans ce cas, il n'y a plus de limite pour la quantité S', car cette quantité surpasse, pour lim. $m=\infty$, une grandeur quelconque donnée.

De ce qui précède on conclura que la définition de l'aire d'une surface courbe donnée par M. Serret doit être modifiée par l'addition d'une condition restrictive concernant la construction du polyèdre inscrit en question.

La figure ci-dessous représente un des polyèdres inscrits dont il vient d'être question.



Je me bornerai, pour parvenir à l'expression analytique de l'aire des surfaces courbes,

aux indications suivantes : Soit :

$$z = f(x, y)$$

l'équation de la surface proposée rapportée à des coordonnées rectangulaires. Je considère d'une part deux plans menés perpendiculairement à Ox, aux distances x et $x + dx$ de l'origine, et de l'autre deux plans perpendiculaires à Oy, aux distances y et $y + dy$. Ces quatre plans déterminent sur la surface un quadrilatère ω, dont la projection sur le plan des xy sera un rectangle ayant pour côtés dx et dy.

Ceci posé, nous admettrons qu'on puisse remplacer ω par la portion du plan tangent en un quelconque de ses points, qui se projette sur le même rectangle. C'est donc prendre en nommant λ l'angle du plan tangent considéré avec le plan des xy

$$\omega = \frac{dx\,dy}{\cos\lambda},$$

et comme une variation infinitement petite dans cet angle n'altérera ω que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle-même, on peut considérer le plan tangent au point (x, y, z) qui est l'un des sommets du quadrilatère ; ce qui donnera :

$$\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2}}$$

On a ainsi, en posant suivant l'usage :

$$p = \frac{df}{dx}, \qquad q = \frac{df}{dy},$$

$$\omega = dx\,dy\,\sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

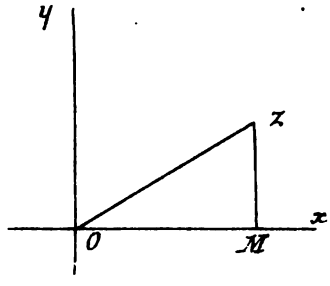
et si l'équation $F(x, y) = 0$ représente la projection du contour qui limite l'aire, il s'agira d'effectuer la somme de tous les éléments ω correspondant aux points contenus à l'intérieur de cette courbe, question d'Analyse identique à celle que nous avons traitée plus haut ; d'où l'on voit qu'on peut assimiler, en général, l'expression analytique de l'aire d'une surface à celle du volume d'un cylindre ayant pour trace la courbe $F(x, y) = 0$ et limité par la surface $z = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$.

L'application la plus importante de cette méthode concerne l'ellipsoïde. Legendre, le premier, a découvert, en faisant usage des coordonnées elliptiques, que cette aire se ramène aux intégrales elliptiques de première et deuxième espèce ; plus tard, M. Catalan est parvenu au même résultat par une voie plus facile, en s'appuyant sur la correspondance remarquable que nous venons de montrer entre les aires et les volumes (Journal de M. Liouville, Tome IV).

VI^ème Leçon.

Avant d'aborder la notion des intégrales prises entre des limites imaginaires, nous allons rappeler succinctement quelques-uns des résultats auxquels conduit la théorie des quantités imaginaires en Algèbre.

Ces résultats sont la conséquence de la représentation géométrique de la quantité $z = x + iy$, au moyen du point d'un plan dont l'abscisse est x et l'ordonnée y, les axes étant rectangulaires. On voit ainsi qu'à une suite de telles quantités correspond une suite de points, de sorte qu'une loi quelconque de succession de valeurs imaginaires d'une variable, sera figurée par une courbe. Cela étant, soit $u = f(z)$, en supposant qu'en faisant $z = x + iy$, on ait : $u = X + iY$, nous appliquerons le même mode de représentation à u et à la variable indépendante ; à un lieu, à une ligne quelconque déterminant la loi de succession des valeurs de z, répondra donc une autre ligne donnant la loi de succession des valeurs de la fonction. Cette seconde courbe est appelée par Gauss l'image de la première.



On peut, d'ailleurs, aussi dans la représentation de la quantité $z = x + iy$, au lieu des coordonnées rectangulaires employer des coordonnées polaires ρ et ω, en faisant $x = \rho \cos \omega$, $y = \rho \sin \omega$, ρ étant la distance Oz toujours prise positivement, et ω l'angle zox. Alors on nomme ρ le module, l'angle ω l'argument de z, et à l'égard de u nous poserons semblablement :

$$X = R \cos \varphi \,, \qquad Y = R \sin \varphi \,.$$

Ces principes établis, notre but est maintenant de montrer comment la dépendance de ces éléments analytiques, ou celle de deux figures construites avec les quantités z et u, manifeste les propriétés caractéristiques les plus importantes de la fonction.

Nous commencerons cette étude par le cas le plus simple, en considérant le binôme

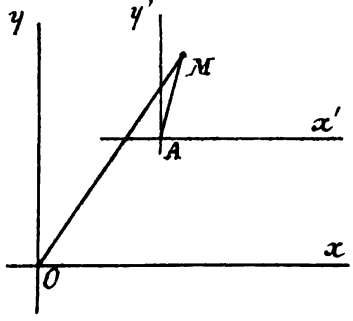
$$u = z - a,$$

où $a = \alpha + \beta i$; on aura donc :

$$u = (x - \alpha) + i(y - \beta)$$
$$= x' + iy' \,,$$

ou bien :

en posant $x - \alpha = x'$, $y - \beta = y'$.



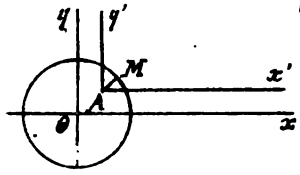
Soient A et M les points qui représentent les quantités a et z. Traçons par A deux droites Ax', Ay' parallèles aux axes Ox et Oy. Les formules précédentes nous montrent que le point M représente $z - a$, si l'on prend pour axes les deux droites Ax', Ay' ; en faisant :

$$u = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

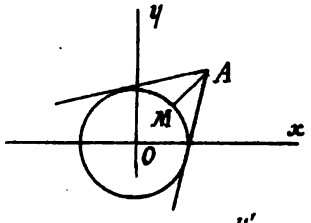
on a par conséquent :

$$MA = R \,, \qquad MAx' = \varphi \,.$$

Ceci posé, admettons en premier lieu que le point M décrive un cercle dont le centre est en O, le module ρ de z étant constant, nous ferons croître son argument ω d'une manière continue depuis une valeur initiale ω_0 jusqu'à la valeur $\omega_0 + 2\pi$.



La figure montre alors immédiatement que si le point A est à l'intérieur du cercle, l'argument φ de u augmente de 2π en même temps que ω, tandis que si le point A est à l'extérieur du cercle décrit par le point M quand ω croît de ω_0 à $\omega_0 + 2\pi$, l'angle φ varie tour-à-tour en décroissant et en augmentant, mais reste compris entre deux limites fixes, et finit par reprendre sa valeur primitive.



Ces résultats peuvent aussi être obtenus par le calcul, en partant de l'expression de tang φ en fonction de ω, mais c'est la géométrie qui permet de les étendre au cas général où le point M, représentant la variable z, décrit au lieu d'une circonférence une courbe fermée quelconque.

Fig (1)

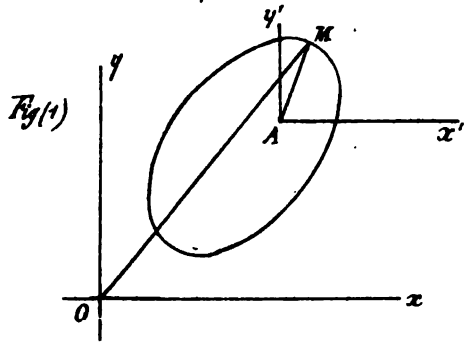
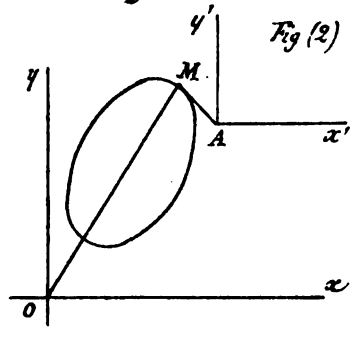


Fig (2)



Ainsi la figure (1) montre, lorsque le point A est intérieur à cette courbe, que l'argument : $\varphi = MAx'$ sera devenu $\varphi + 2\pi$, lorsqu'elle aura été parcourue en entier et une seule fois, l'espace illimité étant à droite.

La figure (2) fait voir ensuite que dans le cas du point extérieur cet angle reprend sa valeur initiale.

Considérons maintenant le module et l'argument du produit d'un nombre quelconque de facteurs binômes :

$$u = (z-a)(z-b) \ldots\ldots\ldots\ldots (z-l),$$

en supposant que la variable imaginaire $z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$ décrive un contour fermé quelconque S.

Si l'on fait :

$$\begin{aligned} z-a &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ z-b &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z-l &= r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) \end{aligned}$$

et

$$u = R(\cos\Phi + i\sin\Phi)$$

on aura :

$$R = r r_1 \ldots\ldots r_n$$

$$\Phi = \varphi + \varphi_1 + \ldots\ldots + \varphi_n + 2k\pi.$$

Cela posé, lorsque la variable z partira d'un point du contour pour y revenir après l'avoir décrit entièrement et une seule fois, des divers arguments φ, fonctions continues de ω, ceux qui correspondent à des constantes a, b, ... l, renfermées à l'intérieur de S, augmenteront de 2π,

et ceux qui correspondent à des quantités placées à l'extérieur reprendront, au contraire, la même valeur. On a donc le théorème suivant :

Lorsque la variable z décrit un contour fermé, l'argument du polynôme entier

$$u = (z-a)(z-b)\ldots\ldots\ldots(z-l)$$

varie d'un multiple entier $2\mu\pi$ de la circonférence, μ étant le nombre des racines de l'équation $u=0$ qui sont contenues dans l'intérieur de ce contour.

Ce beau résultat a été découvert par Cauchy ; nous le retrouverons bientôt ainsi que le théorème célèbre par lequel se détermine le nombre des racines des équations algébriques qui sont à l'intérieur d'une courbe unicursale, en suivant la voie même qui y a conduit le grand géomètre. Nous nous proposons maintenant d'en faire l'application à l'étude de la fonction irrationnelle définie par :

$$u^2 = F(z) = (z-a)(z-b)\ldots\ldots\ldots(z-l).$$

Soit, à cet effet, comme plus haut, S la courbe décrite par la variable z, et posons :

$$F(z) = R(\cos\Phi + i\sin\Phi).$$

La racine $u = +\sqrt{F(z)}$ s'obtient immédiatement sous la forme $\sqrt{R}\left(\cos\frac{1}{2}\Phi + i\sin\frac{1}{2}\Phi\right)$, et les équations :

$$X = \sqrt{R}\cos\tfrac{1}{2}\Phi, \quad Y = \sqrt{R}\sin\tfrac{1}{2}\Phi$$

nous permettront de construire l'image de cette courbe S.

Supposons donc qu'au point de départ on ait : $\Phi = \Phi_0$; lorsqu'elle est décrite en entier et une seule fois, l'argument Φ parvient, comme nous l'avons vu, en variant d'une manière continue, à la valeur $\Phi_0 + 2\mu\pi$. Alors on voit que μ étant un nombre impair, les coordonnées X et Y ne reprennent point leurs valeurs initiales, de sorte que le lieu géométrique relatif à u n'est point une courbe fermée, et qu'il l'est au contraire si μ est supposé un nombre pair.

Ce que l'on vient d'établir à l'égard de la racine $u = \sqrt{F(z)}$ a lieu également pour la seconde racine $u = -\sqrt{F(z)}$, et si l'on construit en même temps les deux courbes figurant la loi de succession de ces quantités, on conclut que, dans le premier cas, le point de départ de l'une d'entre elles coïncidant avec le point d'arrivée de l'autre, on obtient, en construisant le double système de points, non pas deux courbes qui, l'une et l'autre, soient interrompues et s'arrêtent brusquement, mais une courbe fermée unique. Dans le second cas, au contraire, chacune des racines reprenant sa valeur initiale, la construction effectuée donne pour résultat deux courbes fermées et distinctes. On a donc ce théorème : La variable indépendante décrivant un contour fermé, le système des racines de l'équation $u^2 = F(z)$ est figuré par une seule courbe, ou par deux courbes fermées distinctes, suivant qu'il y a un nombre impair ou un nombre pair de racines de l'équation $F(z)=0$, renfermées dans l'intérieur de ce contour.

Ce qui précède nous donne une notion importante, c'est celle des fonctions uniformes ou non uniformes.

La dénomination de non uniformes sera employée à l'égard des fonctions de z, qui diffèrent ainsi des fonctions rationnelles par cette circonstance si frappante de donner lieu tantôt à des courbes

fermées, tantôt à des courbes interrompues, suivant le chemin décrit à partir d'un point donné par la variable indépendante pour revenir à ce même point. On nomme, au contraire, uniformes, les fonctions qui sont toujours représentées par des courbes fermées, quel que soit le contour fermé décrit par la variable.

En général, une fonction est non uniforme parce qu'il existe des points jouant un rôle analogue aux points $a, b, c, \ldots\ldots l$ que nous considérions dans le dernier exemple traité. On les a souvent appelés points critiques ; Riemann les nomme points de ramification ; il est aisé de comprendre la raison de cette dénomination ; en effet, quand la courbe décrite par la variable passe par un de ces points, deux des valeurs de u qui correspondent à une même valeur de z deviennent égales en général, de sorte que z dépassant ce point, on peut sans violer la loi de continuité, faire suivre à l'une des deux racines u qui viennent de se confondre deux chemins différents.

Comme dernier exemple, considérons la fonction u définie par l'équation :

$$e^u = z - a,$$

c'est-à-dire le logarithme de $z-a$.

Soit : $$z-a = R(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

et $$u = X + iY.$$

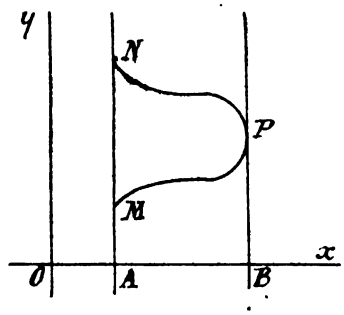
On a : $$e^{X+iY} = R(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

On en déduit en désignant par k un nombre entier :

$$X = \log R, \qquad Y = \varphi + 2k\pi.$$

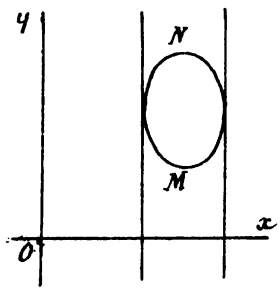
En outre, nous supposons que le point z décrit une courbe fermée, par exemple un cercle dont le centre est à l'origine, de sorte qu'on ait : $z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$, ρ étant constant et ω variant en croissant de ω_0 à $\omega_0 + 2\pi$.

Il résulte de ces hypothèses que l'abscisse X reste constamment comprise entre deux limites fixes qui correspondent au minimum et au maximum de R, et que cette quantité reprend la même valeur, quand ω a augmenté de 2π. Quant à l'ordonnée Y, elle admet une infinité de déterminations ; nous considérerons celle qui répond à $k=0$ par exemple. Cela étant, si le point a est compris à l'intérieur du cercle décrit par z, φ augmenté de 2π en même temps que ω ; il en résulte que si la valeur initiale ω_0 de ω correspond au minimum de R, ω variant de ω_0 à $\omega_0 + 2\pi$, on aura un arc de courbe tel que MPN pour représenter la succession des valeurs de u, MN étant égal à 2π.



Si maintenant on fait croître ω de $\omega_0 + 2\pi$ à $\omega_0 + 4\pi$, et ainsi de suite, il suffira de transporter cet arc MPN parallèlement à Oy aux distances 2π, 4π, etc, dans un sens et dans l'autre. Le lieu qui se compose d'une succession d'arcs égaux est donc une espèce de sinusoïde. Il est de plus bien clair que si l'on part d'une autre détermination de u, on reproduit la même figure ; ainsi l'ensemble de ces différentes déterminations se trouve donné par une seule courbe continue. Elles naissent

toutes d'une seule d'entre elles, et l'on voit qu'il est impossible de les isoler les unes des autres. Il en est tout autrement lorsque le point A est extérieur au cercle décrit par le point z. Alors, en effet, quand ω augmente de 2π, φ en par conséquent Y reprend sa valeur primitive; on a donc pour chaque détermination de u une courbe fermée, telle que MN, et le lieu complet se compose d'une infinité d'anneaux, tels que MN, qu'on transporte parallèlement à Oy aux distances 2π, 4π, etc, dans les deux sens. Ici les diverses déterminations de u peuvent être toutes isolées et distinguées les unes des autres.



Les courbes que nous venons d'obtenir jouissent, dans l'hypothèse de ρ constant, d'une propriété remarquable : leur rectification ne dépend en effet que de l'intégrale elliptique de première espèce.

En effet, soit :

$$z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega), \qquad \alpha = \alpha + i\beta, \qquad u = X + iY,$$
$$z_0 = \rho(\cos\omega - i\sin\omega), \qquad a_0 = \alpha - i\beta, \qquad u_0 = X - iY.$$

Nommons σ l'arc de la courbe considérée, et s l'arc de la courbe décrite par le point z; les relations :

$$du = \frac{dz}{z-a}, \qquad du_0 = \frac{dz_0}{z_0 - a_0}$$

donnent en les multipliant membre à membre :

$$d\sigma^2 = \frac{ds^2}{(z-\alpha)(z_0-a_0)}, \quad \text{car } d\sigma^2 = dX^2 + dY^2 = du\,du_0 \text{ et } ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Or on a : $$ds^2 = \rho^2 d\omega^2,$$

et par conséquent :

$$d\sigma^2 = \frac{\rho^2 d\omega^2}{(\rho\cos\omega - \alpha)^2 + (\rho\sin\omega - \beta)^2}$$

Cela étant, prenons un angle ω_0 tel que :

$$\alpha\cos\omega + \beta\sin\omega = \cos(\omega + \omega_0)\sqrt{\alpha^2+\beta^2};$$

et soit pour simplifier : $$\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

l'expression précédente devient :

$$d\sigma^2 = \frac{\rho^2 d\omega^2}{\rho^2 + \gamma^2 - 2\rho\gamma\cos(\omega+\omega_0)};$$

Posons maintenant : $$\omega + \omega_0 = 2\varphi;$$

on trouvera :

$$d\sigma = \frac{2\rho\,d\varphi}{\sqrt{(\rho^2 - 2\rho\gamma + \gamma^2)\cos^2\varphi + (\rho^2 + 2\rho\gamma + \gamma^2)\sin^2\varphi}}$$

d'où

$$\sigma = 2\rho\int \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}, \quad \text{en faisant : } a = \rho - \gamma, \quad b = \rho + \gamma,$$

et il suffira de poser $x = \sin\varphi$ pour être immédiatement ramené à l'intégrale elliptique de première espèce, ainsi que nous l'avions annoncé.

VII^ème Leçon.

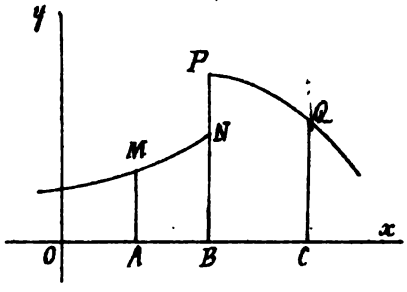
Nous allons dans cette leçon nous occuper des intégrales définies prises entre des limites imaginaires, et pour arriver à leur définition, nous suivrons la voie même de Cauchy, qui le premier a introduit cette nouvelle notion dans l'Analyse.

On sait dans combien peu de cas s'obtient explicitement à l'aide des fonctions de l'analyse élémentaire l'intégrale $\int f(x)\,dx$; par conséquent chaque fois qu'il sera démontré que cette intégrale ne peut pas s'exprimer à l'aide de ces quantités, on se trouvera en présence d'une transcendante, dont on sera conduit à étudier les propriétés. Or, l'algèbre nous a montré, dans l'étude des fonctions qu'elle considère, combien la considération des imaginaires est indispensable ; on comprend ainsi de quelle importance il est d'étendre la définition de l'intégrale, de manière qu'elle ne soit plus restreinte au seul cas des valeurs réelles pour les limites, et c'est à cet objet que répond la découverte capitale de Cauchy.

Avant de l'exposer, nous reprendrons succinctement la notion de l'intégrale définie, telle que nous l'avons obtenue d'abord, en considérant les aires des courbes planes. Cette notion suppose dans $\int_a^b f(x)\,dx$ que $f(x)$ soit une fonction continue, au moins entre les limites de l'intégrale, que cette fonction soit réelle et conserve un signe constant entre a et b, le signe + par exemple, et que la limite inférieure a soit plus petite que la limite supérieure b. Cela étant, la propriété principale de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est d'être égale à la somme des valeurs que prend sa différentielle $f(x)$, lorsque la variable croît par degrés égaux à dx, de la limite inférieure a à la limite supérieure b.

Nous allons nous affranchir successivement des restrictions que nous venons de rappeler et qui sont implicitement contenues dans la notion de l'intégrale définie, telle qu'on l'obtient pour la première fois : mais en même temps, nous vérifierons que la propriété principale de l'intégrale définie continue de subsister.

En premier lieu, je dis que la condition de continuité entre les limites de l'intégration n'est pas nécessaire. Considérons, en effet, à l'égard de deux courbes différentes : $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ les segments contigus :



$$AMNB = \int_{OA}^{OB} f_1(x)\,dx, \qquad BPQC = \int_{OB}^{OC} f_2(x)\,dx.$$

L'aire formée par leur réunion peut être représentée par $\int_{OA}^{OC} f(x)\,dx$, lorsqu'on suppose $f(x) = f_1(x)$ depuis $x = OA$ jusqu'à $x = OB$, et égal ensuite à $f_2(x)$ depuis $x = OB$ jusqu'à $x = OC$; d'ailleurs, dans ce cas encore, l'intégrale $\int_{OA}^{OC} f(x)\,dx$ est égale à la somme des valeurs de $f(x)\,dx$, quand x croît par degrés égaux à dx. La notion d'intégrale définie est ainsi étendue au cas où la fonction sous le signe $\int$ éprouve une discontinuité entre les limites de l'intégration ; plus généralement, elle peut éprouver un nombre

quelconque mais fini de discontinuités.

La seconde remarque sur la notion d'intégrale définie a pour objet le cas où la fonction $f(x)$, au lieu d'être constamment positive entre les limites x_0 et x, présente plusieurs alternatives de signes, de sorte que, par exemple, $f(x)$ ait le signe + de x_0 à x_1, le signe − de x_1 à x_2, et le signe + de x_2 à x. On convient alors de poser:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x} f(x)\,dx,$$

et il est évident qu'en étendant de cette manière la première signification, elle restera toujours la somme des valeurs de sa différentielle, x croissant par degrés égaux à dx, de x_0 à la limite supérieure.

D'autre part, on a aussi admis que cette limite supérieure x surpassait la limite inférieure; la considération de la somme des éléments permet encore de supprimer cette restriction et on conclut immédiatement la relation:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = -\int_{x}^{x_0} f(x)\,dx$$

qui étend la notion de l'intégrale définie au cas de $x < x_0$.

Enfin, supposons $f(x)$ imaginaire et réductible à la forme $\varphi(x) + i\psi(x)$ où les fonctions φ et ψ sont réelles; d'après les conventions qu'on a coutume de faire dans le calcul des imaginaires, on adoptera l'égalité:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + i\int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx,$$

et cette définition se justifie immédiatement, car ici encore l'intégrale est évidemment égale à la somme des valeurs que prend sa différentielle.

Nous allons, en partant de là, généraliser des théorèmes sur les fonctions réelles dont on fait constamment usage en Calcul Intégral.

Considérons en premier lieu l'égalité:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(\xi),$$

où $f(x)$ est une fonction réelle, et ξ une quantité comprise entre a et b. L'extension la plus naturelle en qui se présente immédiatement consisterait à poser:

$$\int_a^b [\varphi(x) + i\psi(x)]\,dx = (b-a)[\varphi(\xi) + i\psi(\xi')]$$

ξ et ξ' étant des nombres compris entre a et b. Mais M. Darboux, dans un mémoire inséré au Journal de M. Résal (1876) a fait connaître à ce sujet un résultat bien plus important, et que nous allons démontrer analytiquement, au lieu d'employer des considérations géométriques, comme l'a fait l'éminent géomètre.

Nous partirons de ce théorème connu: Le module d'une somme de quantités imaginaires est plus petit que la somme des modules de ces quantités, c'est-à-dire que θ désignant un nombre compris entre 0 et 1, on a:

$$\text{Mod.}(a + a' + \ldots\ldots) = \theta\,(\text{mod.}\,a + \text{mod.}\,a' + \ldots.).$$

On sait comment on démontre cette formule de proche en proche, une fois que la représentation géométrique des imaginaires a permis de remarquer que le module d'une somme de deux termes est plus petit que la somme des modules des deux termes. Ceci rappelé, soit:

$$J = \int_a^b f(x)\,dx \quad , \quad \text{où} \quad f(x) = \varphi(x) + i\psi(x).$$

Concevons que J soit exprimé à l'aide de la somme des valeurs que prend sa différentielle quand x varie par degrés égaux à dx. Alors, d'après le théorème précédent, on aura :

$$\text{Mod. } J = \theta \Sigma \text{ mod. } f(x)\,dx,$$

ou, d'après la définition même de l'intégrale définie :

$$\text{Mod. } J = \theta \int_a^b \text{mod. } f(x)\,dx,$$

c'est-à-dire en désignant par ξ un nombre compris entre a et b, en appliquant le théorème rappelé sur les fonctions réelles

$$\text{Mod. } J = \theta\,(b-a)\,\text{mod. } f(\xi).$$

Soient ξ et ω les arguments de J et $f(\xi)$; on a :

$$J = e^{i\xi}\,\text{mod. } J \; ; \qquad f(\xi) = e^{i\omega}\,\text{mod. } f(\xi).$$

La formule précédente devient donc :

$$J = \theta e^{i(\xi-\omega)} f(\xi)(b-a) \; ;$$

le facteur $\theta e^{i(\xi-\omega)}$ est une quantité imaginaire dont le module est inférieur à l'unité ; nous le désignerons, comme l'a fait M. Darboux, par λ, de sorte que l'on a :

$$J = \lambda\,(b-a) f(\xi).$$

Supposons maintenant que la fonction sous le signe d'intégration soit un produit de deux fonctions réelles, f(x) et F(x), et que l'une d'elles, F'(x), soit constamment positive entre les limites de l'intégration ; on aura, comme l'on sait, l'égalité :

$$\int_a^b F(x).f(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b F'(x)\,dx,$$

ξ étant compris entre a et b.

Rappelons en quelques mots la démonstration de cette formule. On sait que si l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ des quantités réelles, et par $A, B, C, \ldots\ldots$ des quantités positives, la fraction $\dfrac{A\alpha + B\beta + C\gamma + \ldots\ldots}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots}$ sera une moyenne entre les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ Supposons que $A, B, C, \ldots\ldots$ soient les valeurs de F(x)dx quand x croît de a à b par degrés égaux à dx, et que $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ soient les valeurs correspondantes de f(x). La fraction considérée deviendra :

$$\frac{\int_a^b f(x)\,F'(x)\,dx}{\int_a^b F'(x)\,dx} \; ;$$

ce qui montre que le théorème résulte immédiatement de la remarque que nous venons de rappeler.

M. Darboux a généralisé aussi cette formule, en supposant $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$. Voici comment on arrive analytiquement au résultat dont le savant géomètre a tiré d'importantes conséquences.

Soit :

$$J = \int_a^b f(x)\,F'(x)\,dx \; ;$$

on aura, comme plus haut :

$$\text{Mod. } J = \theta \int_a^b \text{mod. } f(x).F'(x)\,dx,$$

d'où, en appliquant la formule qui convient aux quantités réelles :

$$\text{Mod. } J = \theta\,\text{mod. } f(\xi)\int_a^b F'(x)\,dx.$$

Alors on en déduit exactement comme tout à l'heure

$$J = \lambda f(\xi) \int_a^b F(x)\, dx,$$

où les lettres λ et ξ conservent la même signification que précédemment.

M^r Darboux a conclu comme il suit, de cette formule, l'extension aux fonctions imaginaires de la série de Taylor, qui n'a été établie dans le calcul différentiel, que pour les fonctions réelles.

Soit t une variable auxiliaire et $f(x)$ une fonction imaginaire dont les dérivées successives seront désignées par $f'(x)$, $f''(x)$, etc. Considérons l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{1.2.\ldots.n} (t-a)^{n+1} f^{n+1}[tx + (1-x)a]\, dx$$

où l'on remarquera que la quantité $(t-a)^{n+1} f^{n+1}[tx+(1-x)a]$ est la dérivée d'ordre $n+1$, par rapport à x, de la fonction : $f[tx + (1-x)a]$.

Je dis qu'il est aisé d'en obtenir la valeur au moyen de la formule d'intégration par parties à savoir

$$\int UV^{n+1} dx = \Theta - (-1)^n \int VU^{n+1} dx$$

V et U désignant deux fonctions quelconques, V^{n+1} et U^{n+1}, leurs dérivées d'ordre $n+1$ par rapport à x, et où l'on a :

$$\Theta = UV^n - U'V^{n-1} + U''V^{n-2} \ldots\ldots + (-1)^n U^n V.$$

En effet, supposons en particulier, $U = \frac{(1-x)^n}{1.2.\ldots.n}$; alors $U^{n+1} = 0$ et l'on en conclut :

$$\int \frac{(1-x)^n}{1.2.\ldots.n} V^{n+1} dx = V + \frac{1-x}{1} V' + \ldots\ldots\ldots + \frac{(1-x)^n}{1.2.\ldots.n} V^n$$

Soit maintenant :

$$V = f[tx + (1-x)a];$$

et par conséquent :

$$V^i = (t-a)^i f^i[tx + (1-x)a];$$

en faisant, $x = 1$, $x = 0$, et retranchant nous obtenons facilement l'expression cherchée à savoir :

$$J = f(t) - f(a) - \frac{t-a}{1} f'(a) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{(t-a)^n}{1.2.\ldots.n} f^n(a).$$

L'intégrale considérée est donc le reste dans la série de Taylor, et la formule de M. Darboux la donne sous la forme suivante :

$$J = \frac{\lambda (1-\theta)^n}{1.2.\ldots.n} f^{n+1}(\xi),$$

si l'on fait

$$\xi = \theta x + (1-\theta) a,$$

θ désignant un nombre compris entre zéro et l'unité.

On parviendrait également à établir par une autre voie la même série en partant de la relation qui se vérifie d'elle-même

$$\frac{f(t) - f(a)}{t-a} = \int_0^1 f'[tx + (1-x)a]\, dx$$

et différentiant n fois les deux membres par rapport à a.

Nous partirons à cet effet de la formule :

$$(UV)^n = UV^n + \frac{n}{1} U'V^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} U''V^{n-2} + \ldots\ldots$$

et nous supposerons : $U = f(a)$, $V = \frac{1}{t-a}$, ce qui donne en divisant par : $1.2..n$:

$$\frac{1}{1.2\ldots\ldots n}\left[\frac{f(a)}{t-a}\right]^n = \frac{f(a)}{(t-a)^{n+1}} + \frac{f'(a)}{(t-a)^n}\cdot\frac{1}{1.2} + \frac{f''(a)}{(t-a)^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{1.2,\ldots n}\frac{f^n(a)}{t-a}$$

Nous obtenons donc ainsi, la relation :

$$\frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} - \frac{f(a)}{(t-a)^{n+1}} - \frac{f'(a)}{(t-a)^n} - \frac{1}{1.2}\frac{f''(a)}{(t-a)^{n-1}} - \ldots\ldots - \frac{1}{1.2,\ldots n}\frac{f^n(a)}{t-a} = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^1 (1-x)^n f^{n+1}[tx+(1-x)a]\,dx,$$

et comme ce second membre est la quantité $\frac{J}{(t-a)^{n+1}}$, on retrouve en chassant le dénominateur, la série de Taylor, avec la même expression du reste que précédemment.

Nous allons encore donner une autre expression de l'intégrale $\int_a^b f(x)F(x)\,dx$, due à M. Weierstrass. Comme plus haut $F(x)$ reste positif entre a et b, et $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$.

Soient p, p', ... des forces parallèles et toutes de même sens : leurs points d'application sont dans le même plan et ont pour coordonnées dans ce plan (x, y) (x', y'), ...

Nommons ξ et η les coordonnées du centre de ces forces parallèles, on aura :

$$\xi = \frac{\Sigma px}{\Sigma p}, \qquad \eta = \frac{\Sigma py}{\Sigma p},$$

et ce point (ξ, η) est situé à l'intérieur d'un contour convexe comprenant tous les points (x, y), ainsi que cela résulte de la construction géométrique à effectuer pour obtenir la résultante d'un système de forces parallèles et de même sens.

Soit $z = x + iy$, et $\mu = \xi + i\eta$, on aura

$$\mu = \frac{\Sigma pz}{\Sigma p}$$

Prenons maintenant : $z = f(x)$, et supposons que $p, p', \ldots\ldots$ soient les valeurs de $F(x)\,dx$ quand x croît de a à b, par degrés égaux à dx. Alors on a :

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)F(x)\,dx}{\int_a^b F(x)\,dx} \quad \text{et par conséquent :} \quad J = \mu\int_a^b F(x)\,dx.$$

Telle est la formule de M. Weierstrass, où le facteur μ représente l'affixe d'un point pris à l'intérieur d'un contour convexe qui contient la succession des divers points, c'est-à-dire le lieu représenté par la fonction $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ quand x varie de a à b. Il en résulte que si ce lieu est une courbe convexe, il peut être pris pour le contour qui renferme le point μ.

Dans certains cas, la proposition de M. Weierstrass coïncide avec celle de M. Darboux. Supposons par exemple $f(x) = \rho(\cos x + i \sin x)$; alors le facteur $\lambda f(\xi)$ de M. Darboux est l'affixe d'un point situé à l'intérieur du cercle de rayon ρ, dont le centre est à l'origine, et il en est évidemment de même du facteur μ de M. Weierstrass. Mais il s'en faut de beaucoup que ces deux formules conduisent toujours ainsi au même résultat.

Soit par exemple $f(x) = a + ib + \rho(\cos x + i \sin x)$. Il est clair alors que le facteur

$\lambda f(\xi)$ est l'affixe d'un point situé à l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine comme centre avec le maximum du module de $f(x)$ pour rayon, tandis que le facteur μ est simplement l'affixe d'un point situé à l'intérieur d'un cercle de rayon ρ, et dont le centre est le point dont l'affixe est $a+ib$. Le facteur de M. Darboux varie donc en général dans un champ beaucoup moins restreint que celui de M. Weierstrass, c'est cependant la formule de M. Darboux qui nous sera surtout utile, et nous l'appliquerons bientôt à des questions importantes.

Ces théorèmes qui donnent sous certaines conditions, des limites d'une intégrale définie, dont la valeur est inconnue, sont d'un grand intérêt, et j'indiquerai encore, en restant dans le domaine des quantités réelles, un résultat bien remarquable dont je doit la communication à M. Tchebichew.

Soit U et V deux fonctions de x, qui entre les valeurs $x=0$, et $x=1$ soient positives, et varient l'une et l'autre dans le même sens, de sorte qu'elles soient continuellement croissantes ou continuellement décroissantes, on aura l'inégalité :

$$\int_0^1 UV\,dx > \int_0^1 U\,dx \cdot \int_0^1 V\,dx .$$

Mais en supposant que l'une des fonctions soit croissante, et l'autre décroissante on devra prendre au contraire :

$$\int_0^1 UV\,dx < \int_0^1 U\,dx \cdot \int_0^1 V\,dx .$$

Ce théorème de l'illustre analyste a été démontré comme il suit par M. Picard :

Proposons-nous par exemple d'établir que

$$\int_0^1 U\,dx \cdot \int_0^1 V\,dx < \int_0^1 UV\,dx$$

U et V étant deux fonctions de x, qui sont positives et vont en décroissant quand x varie de zéro à l'unité. Si l'on partage cet intervalle en n parties égales et que l'on pose $dx=\frac{1}{n}$, les valeurs de U et V étant $U_1, U_2, \ldots U_n$ et $V_1, V_2, \ldots V_n$ pour $x=\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}$, l'inégalité précédente sera établie si on montre que

$$(U_1+U_2+\ldots+U_n)(V_1+V_2+\ldots V_n) < n(U_1V_1+U_2V_2+\ldots U_nV_n)$$

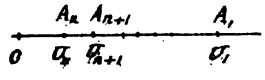
en supposant, d'après ce qui a été dit de U et V, que

$$U_1>U_2>\ldots>U_n \quad \text{et} \quad V_1>V_2>\ldots>V_n .$$

Nous écrirons l'inégalité précédente sous la forme

$$\frac{U_1+U_2+\ldots+U_n}{n} < \frac{U_1V_1+U_2V_2+\ldots+U_nV_n}{V_1+V_2+\ldots+V_n}$$

Or portons en abscisse sur une droite les longueurs $U_1, U_2, \ldots U_{n+1}$



ce qui nous donnera les points $A_1, A_2, \ldots A_n$ le premier membre de l'inégalité précédente représente le centre de gravité des points $A_1, A_2, \ldots A_n$ quand on leur donne la même masse et nous supposerons que cette masse soit V_n. Le second membre représente le centre de gravité des mêmes points quand on leur donne respectivement pour masse $V_1, V_2, \ldots V_n$. Mais décomposons ce dernier système de la manière suivante : soit tout d'abord

le système des points $A_n, A_{n-1}, \ldots A_1$ de masse V_n

puis le système $A_{n-1}, \ldots A_1$ de masse $V_{n-1}-V_n$

et $A_{n-2} \ldots\ldots 1$ de masse $V_{n-2} - V_{n-1}$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$A_2 A_1$, $V_2 - V_3$

A_1 , $V_1 - V_2$.

On voit de suite que ces divers systèmes réunis donnent le système de points $A_1, A_2, \ldots A_n$ avec les masses $V_1, V_2, \ldots V_n$. Or les centres de gravité de ces divers systèmes vont en s'éloignant de l'origine, car

$$\frac{U_1 + U_2 + \ldots + V_n}{n} < \frac{U_1 + \ldots + U_{n-1}}{n-1} < \frac{U_1 + \ldots + U_{n-2}}{n-2} < \ldots < U_1 .$$

Or étant donné un système de points sur une droite, leur centre de gravité est évidemment situé entre les deux extrêmes, c'est-à-dire ici entre

$$\frac{U_1 + U_2 + \ldots + U_n}{n} \quad \text{et} \quad U_1$$

On a donc :

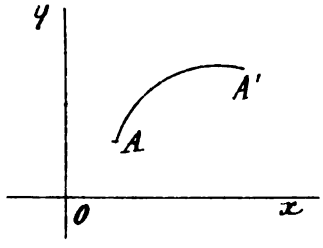
$$\frac{U_1 V_1 + \ldots + U_n V_n}{V_1 + V_2 + \ldots + V_n} > \frac{U_1 + U_2 + \ldots + U_n}{n}$$

Les autres cas de la proposition de M. Tchbichew se démontreraient de la même manière.

Nous allons maintenant donner, d'après Cauchy, la définition du symbole

$$J = \int_{a+ib}^{a'+ib'} f(z, dx) ,$$

$f(z)$ étant une fonction de la variable imaginaire $z = x + iy$, telle que pour tout système de valeurs x et y, on puisse la mettre sous la forme $P + Qi$.



Soient A et A' les points dont les affixes sont $a+ib$ et $a'+ib'$. Joignons ces points par une courbe ou plutôt un chemin quelconque non interrompu, dont nous supposerons les coordonnées x et y exprimées par les formules $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Ces fonctions φ et ψ ne sont assujetties qu'à la condition de donner les points A et A' pour deux valeurs particulières de t, t_0 et t_1 par exemple, c'est-à-dire que l'on aura :

$$\varphi(t_0) + i\psi(t_0) = a + ib$$
$$\varphi(t_1) + i\psi(t_1) = a' + ib' .$$

Il n'est point nécessaire qu'elles aient, entre les limites t_0 et t_1, la même expression analytique ; on peut admettre que le lieu considéré se compose de plusieurs parties de natures diverses, et s'exprimant par différentes fonctions de la variable t.

Cela posé, nous conviendrons d'opérer la substitution de la variable t à z comme on le fait dans une intégrale à limites réelles, et de poser en conséquence :

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t) + i\psi(t)]\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right) dt$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} (P + iQ)(dx + idy)$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} (P\,dx - Q\,dy) + i\int_{t_0}^{t_1} (Q\,dx + P\,dy).$$

Chacune de ces intégrales est une fonction réelle de t, et rentre dans la classe des intégrales curvilignes de M. Karl Neumann.

La notion d'intégrale définie prise entre des limites imaginaires se ramène donc complètement à cette notion d'intégrale curviligne ; mais il faut ici remarquer l'introduction comme élément essentiel, du chemin AA', défini analytiquement par les formules $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$.

Bientôt nous étudierons quel rôle joue cet élément dans la valeur de J ; mais nous commencerons l'étude de l'intégrale de Cauchy en établissant à son égard une formule analogue au théorème de M. Darboux.

Soit
$$J=\int_{t_0}^{t_1}(P+iQ)(dx+idy);$$
nous pouvons écrire :
$$\text{Mod. } J=\theta\int_{t_0}^{t_1}\text{mod.}(P+iQ)\times\text{mod.}(dx+idy).$$
Or on a :
$$\text{Mod.}(dx+idy)=\sqrt{dx^2+dy^2}=ds$$
en appelant ds l'élément d'arc de la courbe AA' ; nous obtenons donc cette expression :
$$\text{Mod. } J=\theta.\text{mod. } f(\xi)\int_{t_0}^{t_1}ds,$$
où ξ désigne une valeur comprise entre t_0 et t_1 ; on en déduit facilement en introduisant le facteur de M. Darboux, λ :
$$J=\lambda.\text{arc } AA'.f(\xi).$$
On verra bientôt de nombreuses applications de ce résultat.

VIII^ème Leçon.

La question qui se présente actuellement est d'étudier l'influence du chemin suivi par la variable, sur la valeur de l'intégrale de Cauchy. Ce chemin AA', défini par les équations :
$$x=\varphi(t)\quad,\qquad y=\psi(t)$$
et qui peut se composer, comme nous l'avons dit, de parties ne se représentant pas par les mêmes expressions analytiques, caractérise la loi de succession des valeurs de la variable entre les deux limites de l'intégrale : c'est ce que M. Neumann appelle le fil d'intégration de la fonction $f(x)$ entre les deux limites.

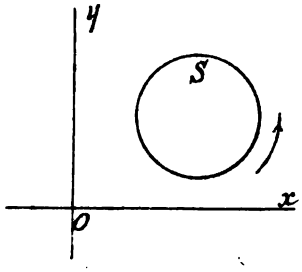
Pour traiter cette question donc Cauchy a donné le premier la solution, dans son célèbre mémoire sur les intégrales prises entre des limites imaginaires, nous suivrons de préférence la méthode due à Riemann, qui repose sur le cas particulier suivant d'une importante proposition de George Green.

Soient U et V deux fonctions de x et de y, réelles, continues et uniformes à l'intérieur d'une aire S; je dis que l'intégrale curviligne relative au contour de cette aire $\int (U\,dx + V\,dy)$ peut s'exprimer par l'intégrale double

$$\iint \left(\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy}\right) dx\,dy$$

qui représente le volume d'un cylindre ayant pour base S, et limitée par la surface : $z = \frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy}$.

Pour démontrer ce théorème, supposons d'abord la courbe qui limite l'aire S, telle qu'à chaque abscisse correspondent seulement deux ordonnées, et de même à chaque ordonnée deux abscisses.



De plus, nous admettons que le contour soit décrit une seule fois, et dans le sens direct, c'est-à-dire de manière à avoir l'espace illimité à droite. Avec ces restrictions et les notions que nous avons données antérieurement sur les intégrales curvilignes, la démonstration de l'égalité :

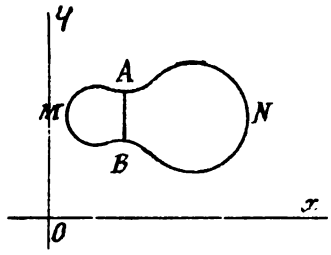
$$\iint \left(\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy}\right) dx\,dy = \int_S (U\,dx + V\,dy)$$

est immédiate. Décomposons, en effet, l'intégrale double du premier membre en ses deux termes, le premier à savoir : $\iint \frac{dV}{dx}\,dx\,dy$ a été étudié et nous est connu; nous l'avons exprimé par l'intégrale simple $\int_S V\,dy$, le contour de l'aire S étant décrit dans le sens direct. Quant au second, $\iint \frac{dU}{dy}\,dx\,dy$, c'est de même $\int_S U\,dx$, mais le contour de l'aire S est alors décrit en sens inverse. On a donc en retranchant :

$$\iint \left(\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy}\right) dx\,dy = \int_S V\,dy + \int_S U\,dx = \int_S (U\,dx + V\,dy);$$

c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

Les fonctions U et V doivent être finies, continues et uniformes. Nous avons dit de plus que la courbe qui limitait l'aire S était telle que pour chaque valeur de x on obtînt deux valeurs seulement pour y, et pour chaque valeur de y deux valeurs de x; cette restriction peut être levée facilement.



Considérons, en effet, une courbe $AMBNA$, où l'on voit que quatre abscisses peuvent correspondre à une même ordonnée. Je remarque qu'en traçant la ligne AB, les deux aires $AMBA$ et $ABNA$ rentrent dans le cas qui a été traité, nous raisonnerons donc comme il suit :

Soit $J = \iint \left(\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy}\right) dx\,dy$ l'intégrale double qui se rapporte à tous les points de l'intérieur de l'aire limitée par la courbe $AMBNA$. J représente le volume du cylindre ayant pour base cette aire et limité par la surface $z = \frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy}$; nommons donc J_1 et J_2 les valeurs de l'intégrale double que nous considérons, relativement aux aires limitées

par les courbes $AMBA$, $ABNA$, on aura : $J = J_1 + J_2$; or on peut appliquer le théorème aux intégrales J_1 et J_2.

En désignant pour cela par l'indication du chemin entre parenthèse la valeur de l'intégrale $\int (V dx + V dy)$ relative à ce chemin, on aura :

$$J = (AMBA) + (ABNA).$$

Or on peut écrire : $(AMBA) = (AMB) + (BA)$

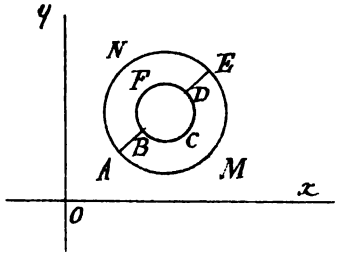
$$(ABNA) = (AB) + (BNA),$$

et comme $(AB) + (BA) = 0$, nous en concluons :

$$J = (AMB) + (BNA) = (AMBNA).$$

J est donc encore, comme dans le cas précédent, égale à l'intégrale curviligne prise par rapport au contour de l'aire. Comme d'ailleurs si compliqué que soit un contour quelconque, on peut toujours le décomposer en un nombre suffisamment grand de parties pour que chacune d'elles satisfasse aux conditions que nous avions d'abord imposées, on voit en raisonnant de proche en proche, comme nous venons de le faire, que le théorème s'applique à un contour quelconque.

Dans l'ouvrage déjà cité de M. Neumann, on trouve la notion que nous devons exposer des aires à plusieurs contours. Nous dirons qu'une aire à n contours est la portion du plan limitée par une courbe extérieure et par $n-1$ autres courbes séparées situées à l'intérieur de la première.



Considérons, en particulier, une aire à deux contours : nous allons étendre à une pareille aire le théorème précédent, en donnant en même temps la définition de ce qu'on appelle décrire le contour de cette aire.

Soit l'intégrale double $\iint \left(\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy}\right) dx\,dy$ prise relativement à tous les points de l'intérieur de l'aire limitée par les deux courbes et qui représentera ainsi le volume d'un cylindre creux.

Imaginons les lignes de partage AB, DE, de telle sorte que l'aire considérée résulte des deux aires simples $AMEDCBA$ et $ABFDENA$; soient J_1 et J_2 les valeurs de l'intégrale double relativement à ces aires ; en se rappelant la signification géométrique de J on voit immédiatement que

$$J = J_1 + J_2.$$

Or, on peut appliquer le théorème aux intégrales J_1 et J_2, et l'on a :

$$J_1 = (AMEDCBA) = (AME) + (ED) + (DCB) + (BA)$$

$$J_2 = (ABFDENA) = (AB) + (BFD) + (DE) + (ENA).$$

En remarquant donc, comme plus haut, que les intégrales relatives à un même chemin décrit dans deux sens différents donnent une somme nulle, on aura :

$$J = (AME) + (ENA) + (BFD) + (DCB)$$

$$= (AMENA) + (BFDCB).$$

Nous voyons donc que J est égale à la somme des intégrales curvilignes relatives aux deux contours, chacun d'eux étant décrit de manière que l'aire limitée se trouve toujours à

gauche ; c'est ce que M. Neumann appelle décrire une aire à deux contours dans le sens direct; on peut donc dire encore que J est égale à l'intégrale curviligne $\int(Udx+Vdy)$ prise par rapport au contour total de l'aire décrite dans le sens direct. Il est, d'ailleurs, évident que le même raisonnement s'applique sans modification à une aire à n contours. Nous avons donc établi pour de telles aires le théorème dont nous allons faire usage pour démontrer, d'après Riemann, la proposition fondamentale de Cauchy.

Soit une fonction $f(z)$ de la variable imaginaire $z=x+iy$, continue et uniforme à l'intérieur d'une aire à un ou plusieurs contours ; je dis que l'intégrale de cette fonction prise le long du contour de cette aire est nulle.

Nous admettrons qu'on puisse poser :

$$f(z) = P+iQ,$$

P et Q étant des fonctions réelles, continues et uniformes de x et y ; nous supposerons aussi que z décrivant le contour considéré, x et y sont donnés par les équations : $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Si donc J est l'intégrale que nous envisageons, on a, comme nous l'avons vu plus haut :

$$J=\int(Pdx-Qdy)+i\int(Qdx+Pdy),$$

où les deux intégrales du second membre sont des intégrales curvilignes qui se rapportent à ce contour. Ceci admis, nous employons, en nous fondant sur le théorème de Green, les expressions suivantes :

$$\int(Pdx-Qdy)=\iint\left(-\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right)dx\,dy$$

$$\int(Qdx-Pdy)=\iint\left(\frac{dP}{dx}-\frac{dQ}{dy}\right)dx\,dy,$$

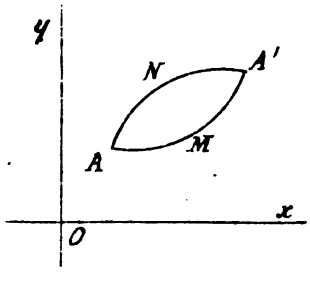
dans lesquelles les intégrales doubles sont prises relativement à l'aire considérée.

Or on sait que les fonctions P et Q sont liées par les relations :

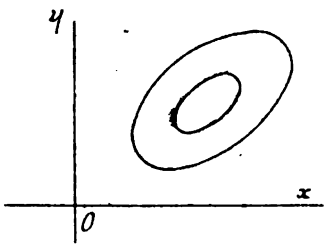
$$\frac{dP}{dx}=\frac{dQ}{dy}\;;\quad \frac{dP}{dy}+\frac{dQ}{dx}=0$$

les deux intégrales considérées sont donc nulles ; il en est de même de J, et notre théorème est démontré.

Nous allons maintenant en développer quelques conséquences.

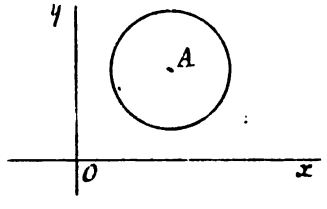


En premier lieu, considérons les valeurs de l'intégrale $\int_{a+ib}^{a'+ib'} f(z)\,dz$, lorsque la variable z parvient du point A au point A' par deux chemins différents AMA', ANA', tels qu'à l'intérieur du contour ainsi formé la fonction $f(z)$ reste continue et uniforme ; soient J_1 et J_2 les deux valeurs de l'intégrale ; l'intégrale prise le long du chemin A'NA est $-J_2$; si donc on applique le théorème précédent, on a : $J_1-J_2=0$, c'est-à-dire que la valeur de l'intégrale ne change pas quand le chemin AMA' se déforme sans atteindre aucun point par lequel la fonction $f(z)$ cesse d'être continue et uniforme.



Considérons, en second lieu, deux courbes fermées, dont l'une est intérieure à l'autre, et telles que dans l'aire qu'elles limitent la fonction $f(z)$ soit continue et uniforme. Je dis que les intégrales de $f(z)dz$ prises le long de ces deux courbes sont égales.

Soient, en effet, J_1 et J_2 les valeurs de ces intégrales prises le long de ces deux courbes décrites chacune dans le sens direct; en appliquant le théorème fondamental et se rappelant ce que nous avons appelé décrire une aire à deux contours dans le sens direct, on a : $J_1 - J_2 = 0$; c'est ce qu'il s'agissait de prouver.



Appliquons ces résultats à la plus simple des fonctions uniformes qui éprouve une discontinuité.

Soit $f(z) = \frac{1}{z-a}$; considérons une courbe fermée comprenant le point A dont l'affixe est a ; l'intégrale $\int \frac{dz}{z-a}$ prise le long de cette courbe se calcule facilement, en remarquant qu'elle ne change pas, d'après la remarque précédente, si on la prend le long d'un cercle de rayon ρ décrit de A comme centre. Alors on devra faire : $z - a = \rho e^{it}$; $dz = i\rho e^{it} dt$;

ce qui conduit à la quantité :

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it} dt}{\rho e^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2i\pi.$$

Telle est la valeur de l'intégrale $\int \frac{dz}{z-a}$ prise le long d'un contour comprenant le point a.

Il ne faudrait cependant pas croire que l'intégrale est différente de zéro toutes les fois que $f(z)$ cesse d'être continue et uniforme dans une aire donnée. Ainsi l'intégrale $\int \frac{dz}{(z-a)^n}$, où n est un nombre entier > 1, est nulle si on la prend le long d'un contour comprenant le point a. On le voit facilement soit en raisonnant comme précédemment, soit en différentiant $n-1$ fois la formule que nous venons d'obtenir $\int \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ par rapport à a.

Plus généralement, on voit que l'intégrale $\int D_z f(z) dz$, où $f(z)$ désigne une fonction uniforme, étant égale à cette fonction augmentée d'une constante, on obtiendra, lorsque z décrit un contour fermé, la même quantité au point de départ et au point d'arrivée. L'intégrale relative à ce contour est donc nulle, quel que soit à son intérieur le nombre des valeurs de la variable qui rendent la fonction infinie.

Considérons, en dernier lieu, une fonction non uniforme de z, et faisons décrire à la variable une courbe comprenant un point de ramification.

Soit, par exemple, $f(z) = z^{a-1}$, où a n'est pas entier ; quand l'argument de z augmente de 2π, la fonction est multipliée par $e^{2ai\pi}$; l'origine est donc un point de ramification.

Calculons l'intégrale $J = \int z^{a-1} dz$ prise le long d'un cercle de rayon R, et dont le centre est à l'origine : nous poserons : $z = Re^{it}$; l'intégrale indéfinie de $z^{a-1} dz$ est : $\frac{z^a}{a} = \frac{(Re^{it})^a}{a}$, et on en conclut, en faisant varier t de $\theta - \pi$ à $\theta + \pi$, afin de décrire la circonférence en entier :

$$J = \frac{2i \sin a\pi \, R^a e^{i\theta}}{a}$$

On voit que cette valeur change avec R et θ, c'est-à-dire avec le point initial sur le cercle. Pour $\theta = 0$, on a en particulier :

$$J = \frac{2i \sin a\pi \, R^a}{a}.$$

Ces remarques faites, nous commencerons les applications des principes que nous venons d'établir, en démontrant le théorème suivant :

Soit $f(x)$ une fonction continue et uniforme à l'intérieur d'une aire limitée par un contour quelconque ; soit x un point quelconque situé à l'intérieur de cette aire, on a :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{f(z)}{z-x} \, dz,$$

l'intégrale étant prise le long du contour de l'aire décrit dans le sens direct.

Du point x comme centre avec un rayon infiniment petit ρ, décrivons une circonférence. La fonction $\frac{f(z)}{z-x}$ est uniforme et continue dans l'aire limitée par le contour formé en cette circonférence ; donc les intégrales $\int \frac{f(z)\,dz}{z-x}$ relatives aux deux courbes, décrites chacune dans le sens direct par rapport à l'aire qu'elles enveloppent sont égales. Evaluons l'intégrale relative à la circonférence ; à cet effet, posons :

$$z = x + \rho e^{ti},$$

on aura :

$$dz = i\rho e^{ti} dt.$$

L'intégrale cherchée est donc :

$$i \int_0^{2\pi} f(x + \rho e^{ti}) \, dt.$$

Or ρ est infiniment petit, et la fonction f est continue ; cette expression devient par conséquent :

$$if(x) \int_0^{2\pi} dt = 2i\pi f(x),$$

et l'on en conclut :

$$2i\pi f(x) = \int \frac{f(z)}{z-x} \, dz,$$

l'intégrale étant prise le long du contour de l'aire : c'est le théorème annoncé.

Cette proposition, découverte par Cauchy, est d'une extrême importance dans l'analyse. Les leçons suivantes vont être consacrées à développer la série des conséquences auxquelles elle conduit.

IX^ème Leçon.

Nous avons vu que la fonction $f(z)$ étant supposée finie, continue et uniforme pour tous les points de l'intérieur d'une aire S, si l'on désigne par x l'affixe d'un point quelconque situé à l'intérieur de cette aire, on a la formule :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

Considérons maintenant une aire à deux contours ; admettons que $f(z)$ soit finie, continue et uniforme pour tous les points de l'espace limité par ces deux contours que nous nommerons S et S'; soit x l'affixe d'un point situé à l'intérieur de cette aire, et σ une circonférence de rayon infiniment petit ayant pour centre ce point. Si l'on décrit dans le sens direct l'aire à trois contours que nous formons ainsi, on aura :

$$(S + S' + \sigma) = 0,$$

en représentant, comme nous l'avons déjà fait, l'intégrale prise le long d'un chemin par l'indication de ce chemin entre parenthèses.

Mais si l'on décrit chaque contour dans le sens direct par rapport à l'aire qu'il enveloppe, cette formule devient :

$$(\sigma) = (S) - (S'),$$

et comme $\sigma = 2i\pi f(x)$, on en conclut :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2i\pi}\int_{S'} \frac{f(z)\,dz}{z-x};$$

et l'on voit de plus aisément comment cette formule se généraliserait pour une aire à n contours.

Cette expression de la fonction $f(x)$ et celle que nous avons rappelée en commençant reçoivent des applications importantes. Nous allons développer celles qui résultent de la première.

En se rappelant qu'une intégrale définie prise entre des limites, soit réelles, soit imaginaires, est toujours la somme des valeurs de la différentielle, lorsque la variable décrit le chemin le long duquel est effectuée l'intégration, on voit, en premier lieu, qu'une fonction finie, continue et uniforme à l'intérieur d'une aire est, pour tous les points de cette aire, complétement déterminée par les seules valeurs qu'elle prend sur la courbe qui en est la limite.

Considérons maintenant l'intégrale $\int_S \frac{f(z)dz}{z-x}$, quand le point x est situé à l'extérieur de l'aire S ; la fonction $\frac{f(z)}{z-x}$ est finie, continue et uniforme en même temps que $f(z)$, pour tous les points de l'intérieur de l'aire S ; l'intégrale considérée est donc nulle, tandis que si x est l'affixe d'un point de l'intérieur de S, la valeur de cette intégrale est $2i\pi f(x)$.

La notion de discontinuité, telle qu'elle s'offre dans les éléments, reçoit ici une grande et importante extension. Ainsi, on a d'abord les fractions rationnelles qui deviennent infinies et par conséquent discontinues pour des valeurs déterminées de la variable, ou bien en certain

points du plan. La formule de Fourier et d'autres analogues donnent ensuite l'exemple d'expressions analytiques dans lesquelles à un changement infiniment petit de la variable correspond une variation finie. Telle est, en particulier, la série trigonométrique :

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\cdots\cdots$$

dont la valeur est $\frac{\pi}{4}$ lorsque x est compris entre $2n\pi$ et $(2n+1)\pi$, n étant un nombre entier quelconque, et qui devient brusquement $-\frac{\pi}{4}$ quand la variable est entre les limites $(2n+1)\pi$ et $(2n+2)\pi$. Mais actuellement les circonstances sont toutes autres ; la nouvelle expression à laquelle nous avons été amené n'est pas discontinue pour un certain nombre limité de valeurs déterminées de la variable, mais en tous les points d'une courbe. Ces lignes, dont la notion résulte naturellement de celle de l'intégrale prise entre des limites imaginaires, ont été envisagées pour la première fois par Riemann, qui leur a donné le nom de coupures ; on va voir immédiatement par la remarque suivante, quel rôle important elles ont en analyse.

Soit, en général, $(S)_i$ l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f_i(z)\,dz}{z-x}$; considérons un nombre quelconque d'aires séparées, limitées par des contours $S, S', S'', \ldots\ldots$ et posons :

$$\Phi(x) = (S) + (S')_1 + (S'')_2 + \cdots\cdots$$

les fonctions $f(z), f_1(z), f_2(z), \ldots\ldots$ étant quelconques. D'après ce que nous avons dit plus haut, si le point x est à l'intérieur du contour S, $\Phi(x)$ sera égale à la fonction $f(x)$; si le point x est à l'intérieur du contour S_1, $\Phi(x)$ sera égale à la fonction $f_1(x)$, et ainsi de suite. Ainsi, au moyen d'intégrales curvilignes, on forme l'expression analytique entièrement explicite, d'une fonction $\Phi(x)$, qui représente successivement $f(x), f_1(x), \ldots\ldots$ quand x appartient à certaines régions données du plan, les fonctions $f(x), f_1(x), \ldots\ldots\ldots$ étant complètement indépendantes les unes des autres.

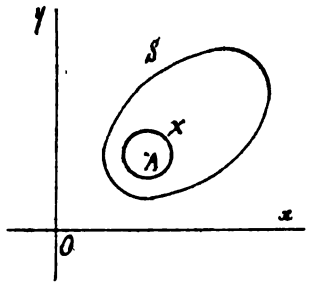
Ce résultat que nous indiquons succinctement, montre comment se modifie et s'étend l'idée de fonction, en tant qu'elle résulte des faits offerts par les combinaisons que l'analyse soumet à notre observation et à nos recherches. Il ouvre le champ d'études dans lequel nous allons maintenant entrer, en nous proposant d'arriver à quelques-unes des propositions concernant la théorie générale des fonctions auxquelles s'attache le nom de M^r Weierstrass. Nous commencerons en premier lieu par la démonstration, sous le point de vue auquel s'est placé Cauchy, du théorème de Taylor.

Soit $f(x)$ une fonction finie, continue et uniforme à l'intérieur d'une aire S ; nommons a et x les affixes de deux points A et X situés à l'intérieur de S ; a étant une constante, et x la variable ; je dis que la série

$$f(x) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \cdots\cdots + \frac{(x-a)^n}{1.2\ldots\ldots n} f^n(a) + \cdots$$

est convergente et a pour somme $f(x)$ sous certaines conditions que nous allons déterminer.

Décrivons, comme le fait M. Neumann, du point A comme centre un cercle



ayant AX pour rayon, et supposons ce cercle entièrement compris à l'intérieur de l'aire S. Nous emploierons l'identité :

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{z^n(z-x)},$$

dont on tire, en remplaçant z par z-a, et x par x-a :

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \cdots\cdots + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^n(z-x)}.$$

Multiplions les deux membres par $f(z)\,dz$, intégrons le long du contour S, et divisons par $2i\pi$; on aura :

$$f(x) = J_0 + (x-a)J_1 + \cdots\cdots + (x-a)^{n-1}J_{n-1} + R$$

en posant :

$$J_k = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)dz}{(z-a)^{k+1}} \qquad \text{et} \qquad R = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^n dz.$$

Nous obtenons ainsi le développement de $f(x)$ suivant les puissances croissantes de $x-a$. Nous allons calculer les valeurs des coefficients, et chercher dans quel cas le développement est convergent.

Soit σ le périmètre du contour considéré, et ζ l'affixe d'un certain point de ce contour ; d'après une formule déjà donnée, on peut écrire, en faisant entrer i dans le facteur λ :

$$R = \frac{\lambda\sigma}{2\pi}\,\frac{f(\zeta)}{\zeta-x}\left(\frac{x-a}{\zeta-a}\right)^n.$$

Or, nous avons supposé le cercle AX tout entier à l'intérieur de l'aire S ; donc le module de $x-a$ est inférieur au module minimum de $\zeta-a$, c'est-à-dire que le module de $\frac{x-a}{\zeta-a}$ est certainement < 1, quel que soit ζ ; le facteur $\left(\frac{x-a}{\zeta-a}\right)^n$ décroît donc indéfiniment quand n augmente indéfiniment, et il en est de même de R puisque $\frac{f(\zeta)}{\zeta-x}$ ne contient pas n. On a par suite la formule :

$$f(x) = J_0 + (x-a)J_1 + \cdots\cdots + (x-a)^n J_n + \cdots\cdots$$

la série du second membre est convergente et a pour somme $f(x)$.

Déterminons maintenant les coefficients J ; à cet effet considérons l'égalité :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

prenons par rapport à x les dérivées n^{es} des deux membres ; les limites de l'intégration étant indépendantes de x, on obtient immédiatement :

$$\frac{f^n(x)}{1.2.\cdots\cdots n} = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

Il en résulte $J_n = \frac{1}{1.2.\cdots\cdots n} f^n(a)$; en conséquence, on a la formule :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \cdots\cdots + \frac{(x-a)^n}{1.2.\ldots n}f^n(a) + \cdots\cdots$$

sous les conditions énoncées plus haut.

On remarquera que l'expression de R donne facilement la forme élémentaire du reste.

dans le cas des quantités réelles. En différentiant par rapport à a, il vient en effet :

$$\frac{dR}{da} = -n\,\frac{(x-a)^{n-1}}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

et par conséquent :

$$\frac{dR}{da} = -\frac{(x-a)^{n-1}\,f^n(a)}{1.2.\ldots.(n-1)}.$$

Le reste s'annulant pour $x=a$, nous en concluons :

$$R = -\int_x^a \frac{(x-a)^{n-1}f^n(a)}{1,2,\ldots.(n-1)}\,da$$

$$= +\int_a^x \frac{(x-a)^{n-1}f^n(a)}{1.2.\ldots.(n-1)}\,da,$$

puis, comme le facteur $x-a$ est >0 entre les limites de l'intégrale

$$R = f^n(\xi)\int_a^x \frac{(x-a)^{n-1}\,da}{1,2,\ldots.(n-1)}$$

$$= \frac{(x-a)^n f^n(\xi)}{1,2,\ldots.n},$$

ξ étant une quantité comprise entre a et x.

On passe de la série de Taylor à celle de Mac-Laurin, en supposant que le point A est l'origine. En conséquence, pour que $f(x)$ soit développable en série convergente ordonnée suivant les puissances de x à l'aide de la formule :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \ldots\ldots$$

le point x doit être tel que la fonction $f(z)$ soit finie, continue et uniforme à l'intérieur du cercle ayant son centre à l'origine, et son rayon égal au module de x, ce qu'on peut encore énoncer avec Cauchy : Une fonction $f(x)$ est développable en série convergente par la formule de Mac-Laurin, la variable pouvant recevoir toutes les valeurs réelles ou imaginaires dont le module est inférieur à la plus petite des quantités pour lesquelles la fonction cesse d'être continue et uniforme.

Ce théorème énoncé sous cette forme offre de grands avantages en ce qu'il dispense de discussion du reste, que l'on est obligé de faire quand on applique la formule de Mac-Laurin dans le Calcul différentiel, et qui d'ailleurs est souvent impossible, parce qu'elle exige qu'on connaisse l'expression d'une dérivée d'ordre quelconque de la fonction. L'application de la formule de Mac-Laurin donne immédiatement les développements des fonctions e^x, $\sin x$, $\cos x$, par les séries :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots.n} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots\ldots$$

qui demeurent convergentes pour tous les points du plan.

La première donne lieu à quelques remarques ; on voit sur le champ que pour une

valeur infinie de la variable, le rapport $\frac{e^x}{x^m}$ est infini quelque soit l'exposant m, supposé positif. Il en est de même de $\frac{e^{nx}}{x}$, n étant encore positif ; or cette quantité, si l'on pose $e^x = \frac{1}{t}$, devenant $-\frac{1}{t^n \log t}$, on en conclut que $t^n \log t$ est nul pour $t = 0$.

Voici une autre conséquence à tirer du même développement.

Soit pour abréger :

$$S_n = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}$$

de sorte qu'on ait :

$$\frac{e^x - S_n}{x^{n+1}} = \frac{1}{1.2\ldots n+1} + \frac{x}{1.2\ldots n+2} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots n+1}\left[1 + \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right]$$

On trouvera facilement en prenant la dérivée d'ordre n, la relation suivante :

$$\frac{e^x \Pi(x) - \Pi_1(x)}{x^{2n+1}} = \frac{1}{1.2\ldots n+1} \sum_0^\infty p \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)x^p}{(n+2)(n+3)\ldots(2n+p+1)}$$

où $\Pi(x)$ et $\Pi_1(x)$ sont deux polynômes à coefficients entiers, du degré n, à savoir :

$$\Pi(x) = x^n - (n+1)\frac{n x^{n-1}}{1} + (n+1)(n+2)\frac{n(n-1)x^{n-2}}{1.2} \ldots\ldots$$

$$\Pi_1(x) = (-1)^n\left[x^n + (n+1)\frac{n x^{n-1}}{1} + (n+1)(n+2)\frac{n(n-1)x^{n-2}}{1.2} + \ldots\right]$$

Cela étant il suffit de remarquer que la série :

$$S = \Sigma \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)x^p}{(n+2)(n+3)\ldots(2n+p+1)}$$

écrite de cette manière :

$$S = \Sigma \frac{1.2\ldots\ldots(p+n)}{(n+2)(n+3)\ldots(2n+p+1)} \cdot \frac{x^p}{1.2\ldots p}$$

a ses termes moindres que ceux du développement de e^x, pour conclure de l'équation précédente, que toutes les puissances entières du nombre e, sont incommensurables.

Supposons en effet, que pour une valeur entière de x, on ait : $e^x = \frac{B}{A}$, A et B étant deux nombres entiers ; cette équation donnera en chassant les dénominateurs, l'égalité :

$$B\Pi(x) - A\Pi_1(x) = \frac{A x^{2n+1}}{1.2\ldots n+1} S$$

Or le second membre, en faisant croître n, peut devenir plus petit que toute quantité donnée, à cause du facteur $\frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots n+1}$; il ne peut d'ailleurs jamais s'évanouir, tandis que le premier est entier, ce qui implique contradiction. C'est à Lambert qu'est due cette proposition, à laquelle il parvient par une autre voie, en établissant cette belle formule de développement en fonction continue à savoir : $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{x^2}{5} + \ldots}}$

Considérons maintenant les fonctions $L(1+x)$ et $(1+x)^n$; d'après ce que nous avons dit de la variation de l'argument du binôme $z-a$ quand l'argument de z augmente de 2π, on voit que ces deux fonctions sont continues et uniformes à l'intérieur d'un cercle de rayon 1, dont le centre est à l'origine. Les développements :

$$\log.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\dots$$
$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1} + \frac{n(n-1)x^2}{1.2} + \dots\dots$$

sont donc applicables uniquement aux valeurs de x dont le module est < 1.

La série du binôme dans le cas de l'exposant entier, donne lieu à une remarque que j'indiquerai succinctement. Soit pour abréger :

$$(1+z)^n = 1 + nz + \dots\dots + Nz^p + \dots\dots$$

Divisons les deux membres par z^{p+1}, on en conclut :

$$\frac{(1+z)^n}{z^{p+1}} = \frac{N}{z} + \frac{1}{z^{p+1}} + \dots\dots$$

Cela étant, multiplions par dz, et intégrons le long d'un cercle de rayon 1 ; tous les termes qui suivent le premier, dans le second membre, disparaîtront et l'on aura :

$$\int \frac{(1+z)^n dz}{z^{p+1}} dz = 2i\pi N$$

où $z = e^{it}$, l'intégrale étant prise de 0 à 2π.

On obtient ainsi l'expression des coefficients du binôme, à l'aide d'intégrales définies, par le procédé même que l'on emploie pour avoir les coefficients de la série de Fourier. Nous pouvons aussi déduire de cette formule la valeur d'une intégrale définie importante, considérée par Cauchy, et qu'on trouvera dans le Traité de Calcul intégral de M. Bertrand. On a :

$$1 + z = 1 + e^{it} = 2\cos\frac{t}{2}\left(\cos\frac{t}{2} + i\sin\frac{t}{2}\right),$$

d'où
$$\int_0^{2\pi} (2\cos\tfrac{t}{2})^n \cos(n-2p)\tfrac{t}{2}\, dt = 2\pi N .$$

En effet $\frac{(1+z)^n dz}{z^{p+1}}$ devient :

$$-\sin(n-2p)\tfrac{t}{2} + i\cos(n-2p)\tfrac{t}{2} \quad ;$$

donc, en égalant les quantités réelles, puis les quantités imaginaires, on voit que nécessairement $\int_0^{2\pi} (2\cos\frac{t}{2})^n \sin(n-2p)\frac{t}{2}\, dt$ a pour valeur zéro, et par suite on a la formule écrite plus haut.

Changeons t en $2t$; cette formule devient :

$$\int_0^{\pi} (2\cos t)^n \cos(n-2p)\, t\, dt = \pi N ,$$

ou, en remplaçant N par sa valeur et n par $n+p$, pour plus de symétrie :

$$\int_0^{\pi} (2\cos t)^{n+p} \cos(n-p)\, t\, dt = \pi \frac{(n+1)\dots\dots(n+p)}{1.2\dots\dots p} ,$$

et enfin, si l'on pose : $\Gamma(K) = 1.2\dots\dots(K-1)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (2\cos t)^{n+p} \cos(n-p)\, t\, dt = \frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(p+1)}$$

C'est là une formule célèbre, que Cauchy a étendue à des valeurs quelconques de

n et p, à condition que $\Gamma(k)$ désigne alors l'intégrale Eulérienne de seconde espèce.

Dans le cas particulier où $n=p$, la formule précédente donne :

$$\int_0^{\pi}(2\cos t)^{2n}dt = \pi\,\frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots 2n}{1.2\ldots\ldots n};$$

ce qui, en posant $\cos t = u$, devient après une transformation facile :

$$\int_{-1}^{+1}\frac{u^{2n}du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi\,\frac{1.3\ldots\ldots\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots\ldots\ldots 2n},$$

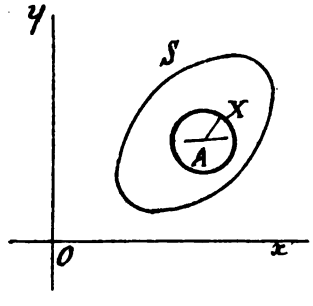
ou encore :

$$\int_0^{1}\frac{u^{2n}du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1.3\ldots\ldots\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots\ldots\ldots 2n}.$$

Les propositions relatives aux séries de Taylor et de Mac-Laurin sont le fondement de la théorie des fonctions uniformes que nous abordons maintenant. Nous commencerons cette étude en considérant d'abord les fonctions appelées holomorphes par MM. Briot et Bouquet, à cause de leurs analogies avec les polynômes que l'on nomme en algèbre fonctions entières. Cette dénomination s'appliquera aux fonctions qui étant uniformes dans toute l'étendue du plan, sont développables en série convergente par la formule de Mac-Laurin pour toute valeur de la variable. Nous dirons aussi qu'une fonction est holomorphe dans une partie du plan seulement quand elle jouit des propriétés que nous venons d'énoncer dans cette partie du plan.

Lorsque le développement suivant les puissances de la variable ne se compose que d'un nombre limité de termes, on a le cas particulier mais des polynômes entiers : en général, les propriétés des fonctions holomorphes sont celles des fonctions entières de l'algèbre convenablement généralisées. Nous allons exposer en suivant la méthode de M. Neumann, la première de ces propriétés.

Si une fonction $f(z)$ holomorphe dans une aire donnée, est constante le long d'un élément de grandeur finie quelconque contenu à l'intérieur de cette aire, elle sera constante dans toute l'étendue de l'aire considérée.



Figurons à l'intérieur de l'aire S l'élément linéaire de grandeur finie, mais aussi petit qu'on le veut, le long duquel $f(z)$ a la valeur constante C. Prenons un point A sur cet élément et un point X à l'intérieur de l'aire S. En appliquant alors la formule de Taylor et remarquant que toutes les dérivées de $f(z)$ sont nulles pour $z=a$, on obtient $f(x)=C$. Ainsi la fonction est constante à l'intérieur du cercle AX ; il est facile d'étendre cette propriété à l'aire S tout entière, en partant d'un nouveau point A' à l'intérieur du cercle AX, et répétant le même raisonnement, puis d'un nouveau point A'' à l'intérieur d'un nouveau cercle ainsi obtenu, et ainsi de suite.

De ce théorème M. Neumann déduit les conséquences suivantes :

En premier lieu, on voit que les zéros d'une fonction holomorphe sont nécessairement des points isolés ; si, en effet, il en était autrement, la fonction serait constamment nulle.

En second lieu, considérons une valeur a telle que $f(a)=0 \quad f'(a)=0 \ldots\ldots f^{n-1}(a)=0$ on pourra, puisque la fonction est holomorphe, appliquer la formule de Taylor, et écrire :

$$f(x)=(x-a)^n f_n(x),$$

$f_n(x)$ étant une nouvelle fonction holomorphe. On dit, dans ce cas, que a est une racine multiple d'ordre n de la fonction $f(x)$; la définition est la même que celle des racines multiples des équations algébriques ; a annule $f(x)$ et toutes ses dérivées jusqu'à $f^{n-1}(x)$, mais n'annule pas $f^n(x)$. Ceci posé, je dis qu'il est impossible qu'une fonction holomorphe ait une racine d'un ordre de multiplicité infini ; en effet, dans ce cas, d'après l'égalité précédente $f(x)$ serait constamment nulle.

Une seconde propriété que nous allons établir, consiste en ce que le module d'une fonction holomorphe augmente indéfiniment en même temps que le module de la variable.

En effet, dans le développement de $f(x)$, suivant les puissances de x, le coefficient de x^n est

$$J_n=\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)dz}{z^{n+1}}$$

Prenons donc pour contour S une circonférence dont le centre est l'origine et dont le rayon est R. On aura, en appliquant une formule connue :

$$J_n=\frac{R\lambda f(\xi)}{(Re^{it})^{n+1}},$$

$f(\xi)$ est la valeur de la fonction pour un point de la circonférence de rayon R, t l'argument correspondant, et nous pourrons encore écrire en faisant entrer le facteur $e^{-(n+1)it}$ dans λ

$$J_n=\frac{\lambda f(\xi)}{R^n}.$$

Cela étant, si nous supposons que, R augmentant indéfiniment, $f(z)$ ne croisse pas indéfiniment, on voit que J_n tendrait vers zéro avec $\frac{1}{R}$, et cela à partir de $n=1$. La série se réduirait donc à son premier terme, et à l'intérieur du cercle de rayon R, la fonction aurait une valeur finie constante, ce que nous avons démontré être impossible. C'est à MM. Briot et Bouquet qu'est due la méthode que nous venons d'exposer.

Xème Leçon.

Nous avons démontré précédemment que les zéros d'une fonction holomorphe ne pouvaient pas former une ligne finie, si petite qu'elle fût. Nous allons montrer, de plus, en suivant la méthode de MM. Briot et Bouquet, que les zéros d'une fonction holomorphe sont nécessairement séparés par des intervalles finis.

Soit a une racine de la fonction $f(x)$; d'après ce que nous avons vu, on peut écrire

$$f(x) = (x-a)^n [A + A'(x-a) + A''(x-a)^2 + \cdots],$$

la série du second membre étant convergente pour toute valeur de x.

Posons $x - a = \rho e^{it}$; la variable décrit alors un cercle de rayon ρ, et dont le centre est au point a, et l'on a :

$$f(x) = \rho^n e^{nit} (A + A'\rho e^{it} + A''\rho^2 e^{2it} + \cdots)$$

Or, on peut assigner un nombre ρ, tel que pour toutes les valeurs de $x-a$ dont le module est inférieur à ρ, le module du premier terme de la série soit plus grand que la somme des modules de tous les autres termes ; en conséquence, le cercle décrit du point a comme centre avec le rayon ρ ne comprendra aucune autre racine de la fonction $f(x)$ que a. Les zéros d'une fonction holomorphe sont donc séparés par des intervalles finis ainsi que nous l'avions annoncé.

Cette proposition nous conduit naturellement à chercher si une fonction holomorphe quelconque ne serait pas susceptible d'un mode de décomposition en facteurs, analogue à celui des polynômes, et qui mettrait ainsi en évidence les zéros de la fonction considérée.

Avant qu'on ait traité en général cette question aussi importante que difficile, quelques cas particuliers avaient été considérés. Ainsi Euler avait donné la formule célèbre :

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \cdots \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \cdots\cdots$$

qui a lieu pour toute valeur de x.

Cauchy le premier s'est occupé de ce sujet, à un point de vue général, sans parvenir encore à une théorie complète, il a reconnu que a désignant une racine de la fonction $f(x)$, au produit des quantités telles que $1 - \frac{x}{a}$ il fallait, dans certains cas, adjoindre un facteur de la forme $e^{G(x)}$, $G(x)$ désignant une fonction holomorphe de la variable x, qui ne s'annule pour aucune valeur de x.

C'est M. Weierstrass qui a, le premier, traité complètement le problème dans un mémoire intitulé : Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable, dont on trouvera la traduction par M. Picard dans les Annales de l'École Normale (1879). A l'aide d'une méthode savante et profonde, l'illustre géomètre expose dans ce mémoire les résultats d'une importance capitale qui lui sont dus, et auxquels nous allons être conduits en suivant une méthode ingénieuse et plus simple, due à l'un de ses élèves, M. Mittag-Leffler, professeur à l'Université de Stockholm.

Nous désignerons dans ce qui suit par a_1, a_2, a_3, ... les racines de la fonction holomorphe $f(x)$, rangées par ordre de modules croissants. Nous les supposerons toutes différentes, et nous admettrons qu'il n'y en ait point d'égale à zéro.

Examinons d'abord un cas qui va nous conduire à un mode de décomposition en facteurs se rapprochant le plus possible de celui qui est relatif aux polynômes.

Supposons que la suite $\Sigma \frac{1}{\text{mod.}\, a}$ formée avec les inverses des modules des racines soit convergente, je dis qu'il en sera de même de la série $\Sigma \frac{1}{x-a}$, quelque soit x, sauf les valeurs

$a_1, a_2 \ldots\ldots$ qui la rendent infinie ; en d'autres termes, cette série sera une fonction analytique.

Pour le faire voir, écrivons de cette manière l'expression du terme général :

$$\frac{1}{\text{mod.}(x-a)} = \frac{1}{\text{mod.}\, a \cdot \text{mod}\left(1-\frac{x}{a}\right)};$$

or, a augmente indéfiniment ; donc, quel que soit x, $\frac{x}{a}$ finit par avoir un module < 1 ; et l'on peut alors poser, en désignant par θ un nombre compris entre 0 et 1 :

$$\text{mod.}\left(1-\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\theta}\left(1-\text{mod.}\frac{x}{a}\right).$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\text{mod.}(x-a)} = \frac{\theta}{\text{mod.}\, a\left(1-\text{mod.}\frac{x}{a}\right)}.$$

Après un nombre suffisant de termes, le facteur $\frac{\theta}{1-\text{mod}\frac{x}{a}}$ devient ainsi et reste au-dessous d'une limite fixe λ donc le terme général de la série $\Sigma \frac{1}{\text{mod}(x-a)}$ est plus petit que le terme général de la suite $\lambda \Sigma \frac{1}{\text{mod.}\, a}$; cette-ci étant convergente, il en est de même de la première, et par conséquent de la série $\Sigma \frac{1}{x-a}$:

De cette remarque nous allons conclure pour $f(x)$ une expression analytique où les zéros de la fonction seront en évidence. Considérons, en effet, la quantité

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \Sigma \frac{1}{x-a}$$

qui est évidemment uniforme pour tous les points du plan ; je dis de plus qu'elle ne devient pas infinie pour les racines a de $f(x)$.

En effet, posons : $f(x) = A'(x-a) + A''(x-a)^2 + \ldots\ldots$, nous avons la différence de deux termes infinis

$$\frac{A' + 2A''(x-a) + \ldots\ldots}{A'(x-a) + A''(x-a)^2 + \ldots} - \frac{1}{x-a} = \frac{A'' + 2A'''(x-a) + \ldots}{A' + A''(x-a) + \ldots}$$

qui se réduit à la quantité finie $\frac{A''}{A'}$ pour $x = a$.

La fonction $\frac{f'(x)}{f(x)} - \Sigma \frac{1}{x-a}$ est donc holomorphe dans toute l'étendue du plan ; nous la représenterons par $G'(x)$, en supposant que $G(x)$ s'annule pour $x=0$; ce qui donnera :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \Sigma \frac{1}{x-a} = G'(x).$$

Multiplions maintenant les deux membres par dx et intégrons à partir de $x=0$, il vient :

$$\log \frac{f(x)}{f(0)} - \Sigma \log\left(1-\frac{x}{a}\right) = G(x),$$

d'où

$$\frac{f(x)}{f(0)} = e^{G(x)} \Pi\left(1-\frac{x}{a}\right);$$

$\Pi\left(1-\frac{x}{a}\right)$ désignant le produit d'un nombre infini de facteurs : $\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{x}{a_n}\right)\ldots\ldots$

Cette formule renferme les résultats trouvés par Cauchy ; pour pouvoir écrire : $f(x) = A\,\Pi\left(1-\frac{x}{a}\right)$, il faut que la série $\Sigma \frac{1}{\text{mod.}\, a}$ soit convergente, et de plus il peut arriver que A contienne un facteur tel que $e^{a(x)}$.

Nous allons maintenant aborder le cas général, en suivant la méthode de M. Mittag-Leffler, qui conduit facilement aux beaux et importants résultats découverts par M. Weierstrass. Observons à ce sujet avec l'illustre géomètre, que la voie lui a été ouverte par l'expression que Gauss a donnée pour représenter par un produit de facteurs en nombre infini, l'inverse de la fonction Eulérienne de seconde espèce.

Lorsque la série $\Sigma \frac{1}{\text{mod. } a}$ n'est plus convergente, la somme $\Sigma \frac{1}{x-a}$ ne représente plus une fonction analytique; mais en retranchant de chaque terme une partie de son développement ordonné suivant les puissances décroissantes de x, M. Mittag-Leffler a remarqué qu'il est possible de former avec ces différences une série absolument convergente.

Soit

$$P_\omega(x) = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \cdots\cdots + \frac{x^{\omega-1}}{a^\omega}$$

on aura:

$$\frac{1}{x-a} + P_\omega(x) = \frac{x^\omega}{a^\omega(x-a)}.$$

Je dis qu'on peut disposer de ω de manière que la série $\Sigma\left[\frac{1}{x-a} + P_\omega(x)\right]$ ou $\Sigma \frac{x^\omega}{a^\omega(x-a)}$ soit convergente.

En premier lieu, il peut arriver que la suite $\Sigma \frac{1}{\text{mod. } a}$ étant divergente, la série formée en élevant tous ses termes à une même puissance soit convergente. Ainsi, la série harmonique $\Sigma \frac{1}{n}$ est divergente, et la série $\frac{1}{n^\mu}$ où μ est >1 est convergente. Dans ce cas, on aura un nombre fixe $(\omega+1)$, tel que la suite $\Sigma \frac{1}{\text{mod. } a^{\omega+1}}$ soit convergente, et on en conclura, comme précédemment, la convergence de la série $\Sigma \frac{1}{\text{mod. } a^{\omega+1} \text{ mod.}(1-\frac{x}{a})}$ et par conséquent de $\Sigma \frac{x^\omega}{a^\omega(x-a)}$.

Mais il s'en faut qu'on puisse toujours opérer de telle sorte, et passer d'une série divergente à une série convergente, en élevant les termes de la première à une même puissance. Considérons, par exemple, la série $\Sigma \frac{1}{\log n}$ qui est divergente; je dis que la série: $\Sigma \frac{1}{(\log n)^\omega}$ le sera encore quelque grand que soit le nombre fixe ω.

Remarquons, en effet, avec M. Stern, professeur à l'université de Göttingue, qu'en posant:

$$S_n = \frac{1}{(\log 2)^\omega} + \frac{1}{(\log 3)^\omega} + \cdots\cdots + \frac{1}{(\log n)^\omega},$$

on aura:

$$S_n > \frac{n-1}{(\log n)^\omega}.$$

Or, on peut écrire:

$$\frac{n-1}{(\log n)^\omega} = \frac{n}{(\log n)^\omega} - \frac{1}{(\log n)^\omega},$$

le second terme de la différence tend vers zéro et peut être négligé; mais le premier augmente sans limite avec n, comme on sait; la série est donc divergente.

Dans les cas semblables, il sera nécessaire de prendre pour ω une valeur qui change avec n; nous ferons avec M. Weierstrass $\omega = n-1$. La série considérée qui devient alors:

$$\Sigma \frac{x^{n-1}}{a_n^{n-1}(x-a_n)} = \frac{1}{x} \Sigma \frac{x^n}{a_n^n\left(1-\frac{x}{a_n}\right)};$$

est convergente, considérons en effet la série des modules ; nous pouvons en employant, comme plus haut, le facteur θ, l'écrire ainsi :

$$\Sigma \left(\text{mod.}\ \frac{x}{a_n}\right)^n \frac{\theta}{1-\text{mod}\ \frac{x}{a_n}} ;$$

or, en désignant par u_n le terme général, on a, quel que soit n, $\lim \sqrt[n]{u_n} = 0$; et l'on sait qu'il suffirait d'avoir $\lim \sqrt[n]{u_n} < 1$ pour n infini.

Ceci posé, l'expression :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \Sigma\left[\frac{1}{x-a} + P_\omega(x).\right]$$

est une fonction analytique qui ne devient jamais infinie, comme on le vérifie aisément. Nous pouvons, par suite, l'égaler à la dérivée $G'(x)$ d'une fonction holomorphe $G(x)$ que nous supposerons s'annuler pour $x=0$, ce qui donne :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \Sigma\left[\frac{1}{x-a} + P_\omega(x)\right] = G'(x).$$

Multiplions les deux membres par dx, intégrons à partir de 0, et soit :

$$Q_\omega(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{x^\omega}{\omega},$$

de sorte qu'on ait :

$$\int_0^x P_\omega(x)dx = \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{x^\omega}{\omega a^\omega} = Q_\omega\left(\frac{x}{a}\right);$$

il vient alors :

$$\log.\frac{f(x)}{f(0)} - \Sigma\left[\log.\left(1-\frac{x}{a}\right) + Q_\omega\left(\frac{x}{a}\right)\right] = G(x),$$

ou bien :

$$\frac{f(x)}{f(0)} = e^{G(x)} \Pi\left(1-\frac{x}{a}\right) e^{Q_\omega\left(\frac{x}{a}\right)}.$$

Telle est la formule découverte par M. Weierstrass, donnant pour toutes les fonctions holomorphes l'expression analytique qui permet de mettre en évidence leurs racines, et de généraliser la décomposition des polynômes en facteurs. Les quantités $\left(1-\frac{x}{a}\right)e^{Q_\omega\left(\frac{x}{a}\right)}$, qui figurent dans cette expression ont été nommées facteurs primaires par l'illustre géomètre.

Si nous supposons maintenant que $f(x)$ ait des racines égales, soit a une racine d'ordre p de multiplicité ; on voit immédiatement que dans la formule précédente, on devra élever le facteur primaire correspondant à la puissance p. Nous avons admis de plus que $f(x)$ n'avait pas de racines égales à zéro ; si, au contraire, $f(x)$ admettait p racines nulles, au lieu de la fonction $f(x)$, on envisagerait le quotient $\frac{f(x)}{x^p}$, et le résultat ne différerait du précédent que par la présence du facteur x^p.

A l'égard du facteur exponentiel $e^{G(x)}$, nous remarquerons qu'il donne l'exemple d'une fonction holomorphe n'admettant aucune racine. C'est ce qui a conduit M. Picard à rechercher s'il existe des fonctions telles que les deux équations $f(x)=a$, $f(x)=b$, n'aient ni l'une ni l'autre aucune racine. L'auteur a établi, dans les Annales de l'École Normale, que la fonction $f(x)$, supposée holomorphe, est alors nécessairement une constante. Et si les

équations considérées n'ont qu'un nombre fini de solutions, cette fonction ne peut être qu'un polynôme. Nous emploierons ces résultats, que nous énonçons sans les démontrer, parce qu'il serait nécessaire, pour cette démonstration, de recourir à la théorie des fonctions elliptiques, théorie qui peut s'établir indépendamment de celle qui nous occupe en ce moment.

Nous allons actuellement appliquer les résultats que nous venons d'obtenir à un exemple particulier, et parvenir ainsi à la formule d'Euler, qu'il est d'ailleurs facile de démontrer par des considérations élémentaires. Considérons la fonction holomorphe $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$; les zéros de cette fonction seront donnés par la suite des nombres entiers positifs et négatifs (sauf zéro) ; la série considérée plus haut $\Sigma \frac{1}{\text{mod. } a}$ est divergente ; mais celle-ci $\Sigma \frac{1}{\text{mod}^2 a}$ est convergente ; nous prendrons donc $\omega = 1$. Les facteurs primaires seront par conséquent : $(1-\frac{x}{n}) e^{\frac{x}{n}}$; en remarquant que $f(0) = 1$, et admettant, ce que nous démontrerons bientôt, que $G(x) = 0$, on a donc la formule :

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \Pi \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}$$

où n reçoit toutes les valeurs entières positives et négatives, sauf zéro. Si on réunit les deux facteurs qui correspondent à deux valeurs de n égales et de signe contraire, on obtient finalement :

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \cdots \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \cdots,$$

c'est la formule d'Euler. Voici une remarque à laquelle elle donne lieu.

Le caractère fondamental des fonctions circulaires qui est leur périodicité apparaît immédiatement quand on étudie ces fonctions géométriquement ; il est au contraire, difficile à reconnaître, quand on définit ces fonctions par leurs développements en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable : l'analyse semble donc avoir un désavantage sur la Géométrie ; mais ce désavantage disparaît si on regarde le sinus, par exemple, comme défini par la formule d'Euler. Cette formule, en effet, a réalisé pour la première fois l'expression analytique d'une fonction où la périodicité est en évidence, ce qui a conduit par une généralisation naturelle aux fonctions doublement périodiques. Écrivons en effet en prenant seulement $2n$ facteurs :

$$F(x) = Ax\,(x-1)(x-2)\cdots(x-n)(x+n)\cdots(x+2)(x+1).$$

Changeons dans cette formule x en $x+1$, il vient :

$$F(x+1) = A\,(x+1)x(x-1)\cdots(x-n+1)(x+n+1)\cdots(x+2),$$

$$F(x+1) = F(x)\,\frac{x+n+1}{x-n}$$

et à la limite, pour $n = \infty$:

$$F(x+1) = -F(x),$$

c'est-à-dire :
$$\sin(x+\pi) = -\sin x,$$

et par suite :
$$\sin(x+2\pi) = \sin x.$$

La périodicité du sinus est donc rendue manifeste par l'expression d'Euler.

On pourrait peut-être penser qu'il est permis d'écrire :

$$\frac{\sin \pi x}{\pi} = x\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{m}\right),$$

les nombres m et n croissant indéfiniment, et par conséquent de substituer au polynôme :

$$F(x) = x\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right),$$

le suivant :

$$\Phi(x) = x\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{m}\right).$$

Mais l'expression de M. Weierstrass montre immédiatement que l'on commettrait une erreur.

Si l'on pose pour abréger :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n},$$

cette formule donne en effet

$$\frac{\sin \pi x}{\pi} = \Phi(x)\, e^{x(S_n - S_m)},$$

m et n croissant indéfiniment. Or on a, pour m et n très grands :

$$S_n - S_m = \log \frac{n}{m},$$

et l'on en conclut la valeur suivante :

$$\Phi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}\left(\frac{m}{n}\right)^x.$$

La limite du produit des facteurs linéaires représenté par $\Phi(x)$ est donc la limite du polynôme $F(x)$ multipliée par le facteur exponentiel $\left(\frac{m}{n}\right)^x$. Cette circonstance s'accorde avec l'égalité :

$$\Phi(x+1) = \Phi(x)\,\frac{m+1+x}{x-n},$$

qui donne, en effet, en faisant grandir les nombres m et n :

$$\Phi(x+1) = -\Phi(x)\,\lim\left(\frac{m}{n}\right);$$

ce n'est donc que dans le cas particulier, où la limite du rapport $\frac{m}{n}$, égale l'unité, qu'on obtient le polynôme entier servant d'origine à une fonction périodique.

Nous allons maintenant développer quelques remarques relatives à une classe particulière de fonctions holomorphes. M. Laguerre a proposé de donner à ces fonctions une désignation qui rappelle le degré ω du polynôme $\varphi_\omega\left(\frac{x}{a}\right)$, lorsque ce nombre est fixe ; à cet effet, il les nomme fonctions du genre ω. Cela étant, supposons toutes les quantités a réelles ; nous allons démontrer à l'égard des fonctions du premier genre jouissant de cette propriété, le théorème de Rolle : entre deux racines consécutives de la fonction, il existe une racine de la dérivée, et une seule. Nous pouvons même pour établir l'existence d'une racine de la dérivée, considérer en général l'expression :

$$f(x) = e^{G(x)} \prod \left(1-\frac{x}{a}\right) e^{\varphi_\omega\left(\frac{x}{a}\right)},$$

qui donne l'égalité :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = G'(x) + \Sigma\left[\frac{1}{x-a} + P_\omega(x)\right].$$

Soient en effet a et b deux racines consécutives de $f(x)$; la fonction $\frac{f'(x)}{f(x)}$ est continue, quand x varie de $a+\varepsilon$ à $b-\varepsilon$; pour $a+\varepsilon$, le deuxième membre est très grand et positif ; pour $b-\varepsilon$, il est très grand et négatif ; donc, dans cet intervalle $\frac{f'(x)}{f(x)}$ et par suite $f'(x)$ change de signe au moins une fois ; $f'(x)$ a donc une racine réelle comprise entre a et b. Je dis maintenant, qu'il n'y a qu'une racine de $f'(x)$ comprise entre a et b ; si l'on suppose $G'(x)=0$ et $P'_\omega(x)=0$. En effet, prenons les dérivées des deux membres de l'égalité précédente, on aura :

$$D_x\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right] = -\Sigma \frac{1}{(x-\alpha)^2}$$

Ceci montre que $D_x\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$ est constamment < 0 ; la fonction $\frac{f'(x)}{f(x)}$, continue entre $a+\varepsilon$ et $b-\varepsilon$, va toujours en décroissant quand x croît, et par suite ne peut s'annuler plus d'une fois. Voici donc le théorème de Rolle transporté aux fonctions du premier genre qui ont toutes leurs racines réelles.

J'ajoute que l'équation $f'(x)=0$ n'a point de racines imaginaires : c'est ce que prouve immédiatement la méthode suivante, due à un géomètre italien extrêmement distingué, Félix Chio, enlevé à la science par une mort prématurée.

Posons $x=\alpha+i\beta$ dans l'équation précédente

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \Sigma\left(\frac{1}{x-a}+p\right),$$

où p désigne une constante ayant pour valeur zéro ou bien $\frac{1}{a}$. On aura en mettant en évidence la partie réelle et le coefficient de i dans le second membre :

$$\frac{f'(\alpha+i\beta)}{f(\alpha+i\beta)} = \Sigma\left[\frac{\alpha-a}{(\alpha-a)^2+\beta^2}-p\right]+i\beta\,\Sigma\frac{1}{(\alpha-a)^2+\beta^2}$$

d'où la condition,

$$\beta\,\Sigma\frac{1}{(x-a)^2+\beta^2}=0,$$

qui ne peut être satisfaite qu'en faisant $\beta=0$, tous les termes de la série étant positifs.

M. Laguerre a fait voir de plus que si une fonction $f(x)$ holomorphe des deux premiers genres, a toutes ses racines réelles, sa dérivée est aussi une fonction holomorphe des mêmes genres. (Dans cette supposition, en effet, la série $\Sigma\frac{1}{\mathrm{mod}^2 a}$ est convergente ; or les racines de la dérivée sont comprises entre les racines de la fonction ; donc la série analogue relative aux racines de la dérivée est aussi convergente, et par suite $f'(x)$ est du genre zéro ou un.

XI^ème Leçon.

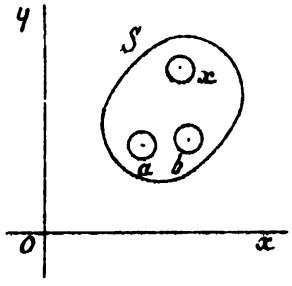
Nous commençons par un cas particulièrement simple, l'étude des fonctions uniformes non holomorphes, dont nous allons maintenant nous occuper. Nous supposerons d'abord que la fonction considérée n'admet de discontinuités qu'en des points isolés, séparés les uns des autres par des intervalles finis, et que de plus le nombre de ces discontinuités, pour tout le plan, est fini et limité. Ces hypothèses faites, nous allons donner l'expression analytique d'une telle fonction qui a été découverte par M. Weierstrass.

Soit une courbe fermée S renfermant à son intérieur tous les points pour lesquels la fonction devient discontinue ; soient a, b, c, ... ces points, en nombre fini. Nous allons obtenir le résultat de M. Weierstrass par une analyse bien simple, donnée par M. Bourguet, professeur à Paris, dans un examen de doctorat.

Considérons l'intégrale de Cauchy

$$\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

prise le long du contour S, décrit dans le sens direct, x représentant l'affixe d'un point situé à l'intérieur de la courbe S. Entourons chacun des points a, b, c, ...x d'une courbe fermée, assez petite pour ne contenir à son intérieur qu'un seul de ces points, ce qui est possible, puisqu'ils sont séparés par des intervalles finis. Nous pourrons supposer que ces courbes soient des cercles de rayon infiniment petit, et ayant les points a, b, ... pour centres. Alors, en désignant l'intégrale $\int \frac{f(z)\,dz}{z-x}$ prise le long d'un certain chemin par l'indication de ce chemin entre parenthèses, nous avons l'égalité :



$$(S) = \int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x} = (a) + (b) + \cdots\cdots + (x),$$

et nous allons étudier chacun des termes qui y figurent. En premier lieu, comme nous l'avons déjà vu, on a :

$$(x) = 2i\pi f(x).$$

Considérons ensuite l'intégrale $\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x}$ et cherchons son expression analytique, en se rappelant les hypothèses faites plus haut.

Remplaçons dans ce but $\frac{1}{z-x}$ par le développement :

$$\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \cdots\cdots + \frac{x^{n-1}}{z^n} + \frac{x^n}{z^n(z-x)};$$

on voit que l'intégration de $\frac{f(z)\,dz}{z-x}$ donnera lieu à un polynôme entier en x de degré $n-1$, et à un reste :

$$R = \int_S \frac{x^n f(z)\,dz}{z^n(z-x)},$$

que l'on peut exprimer ainsi :

$$R = \sigma\lambda \frac{x^n f(\zeta)}{\zeta^n(\zeta - x)},$$

λ étant le facteur de M. Darboux, σ le périmètre de la courbe S, et ζ l'affixe d'un de ses points.

Dans cette formule figure un seul facteur variable avec n : $(\frac{x}{\zeta})^n$. Or, la fonction $f(z)$ étant holomorphe sur le contour S et pour tous les points situés au-delà, puisque l'aire S contient par hypothèse tous les points qui rendent la fonction discontinue, il est permis d'agrandir autant qu'on veut ce contour sans changer la valeur de R. On pourra par suite prendre un contour d'intégration suffisamment grand pour que, quel que soit le point ζ, on ait : $\text{mod}(\frac{x}{\zeta}) < 1$. Il en résulte que R tendra vers zéro quand n augmentera indéfiniment, l'intégrale $\int_S \frac{f(z)dz}{z-x}$ est donc représentée pour toute valeur de x par une série convergente ordonnée suivant les puissances positives croissantes de x ; c'est donc une fonction holomorphe $G(x)$.

Considérons maintenant les intégrales $(a), (b), (c), \ldots\ldots$; on a, par exemple :

$$(a) = -\int \frac{f(z)\,dz}{x - z},$$

l'intégration étant faite suivant une circonférence de centre a et de rayon ρ infiniment petit, de sorte qu'on doit supposer : $z = a + \rho e^{i\varphi}$.

Cette intégrale, si l'on remplace $\frac{1}{x-z}$ par l'expression identique :

$$\frac{1}{x-a} + \frac{z-a}{(x-a)^2} + \ldots\ldots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(x-a)^n} + \frac{(z-a)^n}{(x-a)^n(x-z)},$$

s'exprime par un polynôme entier en $\frac{1}{x-a}$, de degré n, privé de terme constant, et augmenté d'un reste :

$$R = \int \frac{(z-a)^n f(z)\,dz}{(x-a)^n(x-z)};$$

qui peut s'écrire ainsi :

$$R = 2\pi\rho\lambda \frac{(\zeta-a)^n f(\zeta)}{(x-a)^n(x-\zeta)},$$

ζ étant l'affixe d'un point de la circonférence. Le seul facteur variable avec n qui figure dans cette expression est $\left(\frac{\zeta-a}{x-a}\right)^n$; or le module de $\zeta - a$ est ρ ; ρ pouvant être aussi petit qu'on le veut, le reste R a zéro pour limite ; l'intégrale est donc exprimée pour toute valeur de x par une série ordonnée suivant les puissances positives croissantes de $\frac{1}{x-a}$; c'est ainsi une fonction holomorphe de $\frac{1}{x-a}$ sans terme constant, que nous représenterons par $G_a(\frac{1}{x-a})$

En appliquant le même raisonnement aux intégrales $(b), (c), \ldots\ldots$ on obtient :

$$f(x) = \Sigma G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) + G(x),$$

qui donne l'expression analytique de la fonction $f(x)$. C'est dans cette formule que consiste

l'important résultat obtenu pour la première fois par M. Weierstrass.

A cette proposition se rattache une notion analytique d'une importance considérable, due au grand géomètre, et que nous allons maintenant développer.

Dans l'expression précédente, les fonctions G peuvent être de deux sortes: des polynômes ou des séries infinies. Lorsque G_a est un polynôme en $\frac{1}{x-a}$, on dit que le point a est un pôle de la fonction $f(x)$; mais quand $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ sera une fonction transcendante de $\frac{1}{x-a}$, c'est-à-dire une série infinie, le point a sera alors nommé un point singulier essentiel.

Nous allons montrer la nécessité de cette distinction, en cherchant les circonstances que présente la fonction, lorsque la variable est dans le voisinage d'un pôle et d'un point essentiel. A l'égard des pôles, on a par hypothèse:

$$G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) = \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_1}{x-a} ;$$

donc, en même temps que $x-a$ tend vers zéro, $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ augmente sans limite. En effet, dans un cercle de rayon ρ suffisamment petit, décrit du point a comme centre, on sait que le premier terme du polynôme précédent est infiniment grand par rapport à la somme de tous les suivants. Les autres parties de l'expression de $f(x)$ ayant d'ailleurs des valeurs essentiellement finies, la fonction dépasse toute limite, dans le voisinage d'un pôle.

Ajoutons encore que le produit de la fonction $f(x)$ par $(x-a)^m$ est fini pour $x=a$, et développable suivant les puissances de $x-a$, par la série de Taylor. En faisant ainsi $(x-a)^m f(x) = F(x)$, on en conclut:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{(x-a)^m}{F(x)}$$

et l'on voit que l'inverse de $f(x)$ s'annule pour $x=a$.

Considérons maintenant le cas d'un point singulier essentiel, qui conduit à un mode de discontinuité, dont la notion est entièrement due à M. Weierstrass.

Nous allons faire voir que dans le voisinage d'un tel point, la fonction est complètement indéterminée, et peut prendre une valeur quelconque arbitrairement choisie, à l'exception peut-être d'une seule.

La fonction $G(z)$ étant, en effet, transcendante et holomorphe, on sait, d'après les théorèmes de M. Picard rappelés précédemment, que l'équation $G(z) = \alpha + i\beta$ admet toujours un nombre infini de racines $z = z_n$, sauf, peut-être, pour une seule et unique valeur du second membre. Nous savons aussi que ces racines sont représentées par des points isolés et séparés par des intervalles finis, il en résulte que le module de z_n croît au-delà de toute limite. Cela étant, la relation $\frac{1}{x-a} = z_n$ donne:

$$x = a + \frac{1}{z_n} ,$$

ce qui prouve que dans le voisinage d'un point essentiel la fonction $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$, et par suite aussi, la fonction considérée peut prendre une valeur quelconque donnée à l'avance, sauf peut-être une seule.

Nous allons éclaircir ce qui précède par un exemple. Considérons la fonction $e^{\frac{1}{x-a}}$, on a, pour toute valeur de $\frac{1}{x-a}$:

$$e^{\frac{1}{x-a}} = 1 + \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{x-a} + \frac{1}{1.2}\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{1}{(x-a)^3} + \cdots\cdots,$$

et nous allons vérifier qu'en désignant par $\alpha + i\beta$ une quantité arbitraire, il est possible d'obtenir une valeur $\xi + i\eta$ de $x-a$, aussi petite qu'on le veut, et telle que l'on ait :

$$e^{\frac{1}{\xi+i\eta}} = \alpha + i\beta.$$

Soit à cet effet : $\qquad \alpha + i\beta = e^{p+iq}$,

l'équation précédente devient alors :

$$\frac{1}{\xi+i\eta} = p + iq = \frac{p^2+q^2}{p-iq}$$

et l'on en tire :

$$\xi = \frac{-p}{p^2+q^2}$$

$$\eta = \frac{q}{p^2+q^2}.$$

Il semble ainsi que ξ et η soient complètement déterminés ; mais l'équation proposée est encore satisfaite si on y remplace q par $q + 2k\pi$, l'exponentielle admettant la période $2i\pi$; q peut augmenter au-delà de toute limite ; il en résulte que ξ et η peuvent devenir aussi petits qu'on le veut. La fonction $e^{\frac{1}{x-a}}$ est par conséquent complètement indéterminée dans le voisinage du point a.

Indiquons encore une différence caractéristique entre les pôles et les points essentiels : si, en effet, au lieu de la fonction proposée on considère son inverse, on voit qu'un pôle se transforme en un zéro, tandis qu'un point essentiel reste un point essentiel, l'inverse de la fonction étant indéterminée comme la fonction elle-même.

Nous appliquerons l'expression des fonctions uniformes que nous venons d'obtenir à la démonstration d'un théorème, appelé théorème de Cauchy, qui donne l'expression de l'intégrale d'une fonction uniforme, prise le long d'un contour fermé, et conduit à une notion analytique d'une grande importance, celle des résidus.

Soit S un contour fermé, contenant en totalité ou en partie seulement les discontinuités de la fonction uniforme $f(x)$, et proposons-nous d'obtenir l'expression de l'intégrale $\int_S f(x)\,dx$.

Soient $a, b, c, \ldots$ les points compris à l'intérieur du contour S, pour lesquels la fonction cesse d'être continue ; décrivons de chacun de ces points comme centre un cercle de

rayon suffisamment petit pour que deux quelconques de ces cercles n'empiètent pas l'un sur l'autre ; nous formons ainsi une aire à plusieurs contours, à l'intérieur de laquelle la fonction proposée est finie, continue et uniforme ; nous avons par suite l'égalité :

$$(S) = (a) + (b) + \ldots$$

Évaluons maintenant l'intégrale :

$$(a) = \int_a f(x)\,dx .$$

Nous avons vu que l'on a :

$$f(x) = G(x) + \Sigma\, G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) ;$$

il résulte de cette formule que, sur la circonférence et à l'intérieur du cercle ayant a comme centre, toutes les fonctions dont la somme constitue $f(x)$ sont finies, continues et uniformes, à l'exception de $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$; par suite l'intégrale (a) se réduit à :

$$\int_a G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)dx .$$

Or, d'après la nature de la fonction G, on peut écrire :

$$G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) = \frac{A}{x-a} + g'_a\left(\frac{1}{x-a}\right),$$

en désignant par $g'_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ la dérivée d'une fonction holomorphe de $\frac{1}{x-a}$. L'intégrale (a) sera donc égale à $\int_a \frac{A\,dx}{x-a}$, c'est-à-dire $2i\pi A$, augmentée de l'intégrale $\int g'_a\left(\frac{1}{x-a}\right)dx$; or g_a est une fonction uniforme de x qui reprend la même valeur, au point de départ et au point d'arrivée sur la circonférence a ; donc cette intégrale est nulle. Ainsi, on a simplement :

$$(a) = 2i\pi A ,$$

par suite :

$$(S) = \int_S f(x)\,dx = 2i\pi \Sigma A .$$

A est ce que Cauchy appelle le résidu de la fonction $f(x)$ relativement au point a pour lequel la fonction devient discontinue. L'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_S f(x)\,dx$ est donc égale à la somme des résidus de la fonction relatifs aux discontinuités situées à l'intérieur du contour S.

La théorie des résidus est due entièrement à Cauchy, et a servi à l'illustre géomètre comme d'instrument analytique pour arriver à ses plus belles découvertes. Nous allons en montrer immédiatement une application, après avoir donné des résidus la définition même de Cauchy.

Reprenons à cet effet l'expression de $f(x)$, savoir :

$$f(x) = G(x) + \Sigma\, G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$$

et remplaçons x par $a+h$; pour des valeurs infiniment petites de h, les fonctions dont la somme constitue $f(x)$ seront toutes développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances positives croissantes de h, sauf $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$, qui se développera en série ordonnée suivant les puissances positives croissantes de $\frac{1}{h}$; le coefficient A du terme en $\frac{1}{h}$ dans cette série sera le résidu de la fonction $f(x)$ par rapport à la valeur a, qui

rend la fonction discontinue. Telle est la définition dont on fait continuellement usage, nous allons en montrer une application en donnant une formule qui est sous un certain point de vue une généralisation de la série de Taylor.

Considérons une courbe fermée S, à l'intérieur de laquelle sont compris des points $a, b, c, \ldots\ldots l$ fixes, et un point variable x ; nous supposons que les cercles décrits de ces points $a, b, \ldots\ldots$ comme centres avec les distances $ax, bx, \ldots\ldots$ pour rayons soient tous compris à l'intérieur de la courbe considérée.

Cela étant, désignons par $f(z)$ une fonction holomorphe dans l'aire limitée par S, et posons :

$$F(z) = (z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}\ldots\ldots\ldots\ldots(z-l)^{\lambda},$$

les exposants $\alpha, \beta, \ldots \lambda$, étant des nombres entiers.

Nous nous proposons d'obtenir la détermination de l'intégrale suivante :

$$\int_S \frac{f(z)\ F(x)}{(z-x)\ F(z)}\, dz ;$$

elle donne comme on voit le reste de la série Taylor, dans le cas particulier où l'on suppose :

$$F(z) = (z-a)^{\alpha}.$$

J'observe à cet effet que la fonction sous le signe d'intégration est discontinue pour les valeurs de la variable : $a, b, \ldots. l, x$ qui annulent le dénominateur $(z-x)\,F(z)$; l'intégrale considérée est par suite égale au produit de $2i\pi$ par la somme des résidus de $\frac{f(z)F(x)}{(z-x)F(z)}$ relatifs à ces divers points $a, b, \ldots. l, x$.

Calculons d'abord le résidu correspondant à $z=x$. C'est le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de $\frac{f(x+h)\,F(x)}{h\,F(x+h)}$ ordonné suivant les puissances croissantes de h ; ce coefficient est évidemment $\frac{f(x)\,F(x)}{F(x)}$ ou simplement $f(x)$.

Déterminons maintenant le résidu correspondant à l'un des points $a, b, \ldots\ldots l$, a par exemple, nous aurons à effectuer le développement de la quantité :

$$\frac{f(a+h)\,F(x)}{[x-(a+h)]F(a+h)}.$$

$F(z)$ étant égal à $(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}\ldots\ldots(z-l)^{\lambda}$. On tire d'abord de la simple division algébrique :

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{1}{h^{\alpha}}(A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots\ldots A_{\alpha-1} h^{\alpha-1} + \ldots).$$

En second lieu, on a :

$$\frac{1}{x-(a+h)} = \frac{1}{x-a} + \frac{h}{(x-a)^2} + \frac{h^2}{(x-a)^3} + \ldots\ldots + \frac{h^{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha}} + \ldots\ldots$$

Le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de $-\frac{f(a+h)\,F(x)}{[x-(a+h)]F(a+h)}$, c'est-à-dire le résidu cherché est donc :

$$-\left[\frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{A_{\alpha-2}}{(x-a)^2} + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\right]F(x);$$

c'est par conséquent un polynôme entier en x de degré moindre d'une unité que $F(x)$. En effectuant le même calcul, à l'égard des quantités $b, c, \ldots$ etc., on voit que l'intégrale proposée est égale à $f(x)$ diminué d'un polynôme $\Pi(x)$ de degré inférieur à :

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda$$

ce qui permet d'écrire la formule :

$$f(x) = \Pi(x) + \int_S \frac{f(z)\,F(x)}{(z-x)\,F(z)}\,dz.$$

Voici les conséquences auxquelles elle conduit.

Je remarque que $F(x)$ admettant la racine a au degré de multiplicité α s'annule ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $\alpha - 1$ pour $x = a$; on en conclut immédiatement en dérivant $\alpha - 1$ fois successivement les deux membres de l'égalité considérée que pour $x = a$, les fonctions $f(x)$ et $\Pi(x)$ ainsi que leurs $\alpha - 1$ premières dérivées sont égales entre elles.

On obtient un résultat semblable à l'égard de $b, c, \ldots\ldots$ et il en résulte que le polynôme $\Pi(x)$, dont le degré est $\alpha + \beta + \ldots\ldots \lambda - 1$ remplit les conditions suivantes au nombre de $\alpha + \beta + \ldots\ldots + \lambda$, à savoir :

$$\begin{array}{llll}
\Pi(a) = f(a) & \Pi'(a) = f'(a) & \ldots\ldots\ldots & \Pi^{\alpha-1}(a) = f^{\alpha-1}(a) \\
\Pi(b) = f(b) & \Pi'(b) = f'(b) & \ldots\ldots\ldots & \Pi^{\beta-1}(b) = f^{\beta-1}(b) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\Pi(l) = f(l) & \Pi'(l) = f'(l) & \ldots\ldots\ldots & \Pi^{\lambda-1}(l) = f^{\lambda-1}(l)
\end{array}$$

Il est par suite entièrement déterminé, et la relation

$$f(x) - \Pi(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{\alpha}\left(\frac{x-b}{z-b}\right)^{\beta}\ldots\ldots\left(\frac{x-l}{z-l}\right)^{\gamma} dz$$

montre que sous les conditions que nous avons posées précédemment, à savoir :
$\mathrm{mod}(x-a) < \mathrm{mod}(z-a)$, $\mathrm{mod}(x-b) < \mathrm{mod}(z-b)\ldots\ldots$, $\mathrm{mod}(x-l) < \mathrm{mod}(z-l)$, il représente la fonction $f(x)$ avec d'autant plus d'approximation que le nombre des quantités $a, b, \ldots\ldots l$ est plus grand, ou encore qu'on attribue des valeurs plus grandes aux exposants $\alpha, \beta, \ldots\ldots \lambda$. Le résultat auquel nous venons de parvenir, concerne la théorie importante de l'interpolation, et on l'applique au calcul par approximation des intégrales définies.

XII^e Leçon.

Nous allons actuellement aborder l'étude des fonctions uniformes admettant un nombre infini de discontinuités polaires ou essentielles.

Dans ces recherches profondes et difficiles, tous les résultats sont dus, ainsi que nous l'avons déjà dit, à M. Weierstrass, et à son élève, M. Mittag-Leffler, qui est parvenu à un théorème absolument général sur l'expression analytique de ce genre de fonctions. Avant d'exposer ce beau théorème, nous allons traiter la question dans quelques cas particuliers, qui nous conduiront à des remarques importantes.

Soit $f(z)$ une fonction uniforme admettant un nombre quelconque de discontinuités. Soient $a, b, c, \ldots\ldots$ celles de ces discontinuités, en nombre fini et limité, qui sont comprises, ainsi que la quantité x à l'intérieur du contour fermé S. Nous avons obtenu dans la dernière leçon, pour le cas où la fonction n'admettait pas de discontinuités à l'extérieur de S, la formule

$$f(x) = G(x) + \Sigma\, G_a\left(\frac{1}{x-a}\right).$$

C'est ce résultat que nous allons établir sous un autre point de vue, en partant de la relation :

$$J = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x} = f(x) - \Sigma\, G_a\left(\frac{1}{x-a}\right),$$

où $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ est toujours une fonction de $\frac{1}{x-a}$ holomorphe dans tout le plan.

Comme nous supposons essentiellement que le contour S ne passe par aucune des discontinuités de la fonction $f(z)$, on voit que l'expression $\frac{f(z)}{z-x}$ est une fonction finie et bien déterminée pour tous les points du contour S ; par suite, l'intégrale J est une fonction finie, continue et uniforme pour tous les points x situés à l'intérieur de ce contour. En la représentant par $\Phi(x)$, on peut donc écrire :

$$f(x) = \Sigma\, G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) + \Phi(x).$$

Cette expression comprend celle que nous avons obtenue dans la leçon précédente lorsque nous supposions que la fonction $f(z)$ n'admettait pas d'autres discontinuités que celles comprises à l'intérieur de S. Dans ce cas, en effet, on peut agrandir indéfiniment le contour sans modifier la valeur de l'intégrale J ; $\Phi(x)$ est par suite une fonction finie, continue et uniforme dans toute l'étendue du plan, c'est-à-dire une fonction holomorphe $G(x)$; d'où la formule :

$$f(x) = G(x) + \Sigma\, G_a\left(\frac{1}{x-a}\right).$$

Du résultat que nous venons d'obtenir, nous pouvons tirer la démonstration du théorème de Cauchy dans le cas général d'une fonction uniforme admettant un nombre quelconque de discontinuités.

Soit $f(z)$ une telle fonction ; envisageons l'intégrale $\int_S f(z)\,dz$, en supposant

qu'à l'intérieur du contour fermé S, il n'y ait qu'un nombre fini et limité de discontinuités de $f(z)$, tandis qu'à l'extérieur de ce contour il y en a un nombre infini.

La formule que nous venons d'établir :

$$f(z) = \Sigma G_a\left(\frac{1}{z-a}\right) + \Phi(z),$$

fait voir immédiatement que, $\Phi(z)$ étant une fonction holomorphe à l'intérieur du contour S, on a :

$$\int_S \Phi(z)\, dz = 0 ;$$

on se trouve donc ramené immédiatement au cas traité dans la dernière leçon. En raisonnant alors comme nous l'avons fait, on démontre la formule :

$$\int_S f(z)dz = 2i\pi\,(A + B + C \ldots),$$

où $A, B, C, \ldots$ sont les résidus qui correspondent aux pôles aux points essentiels $a, b, c, \ldots$ de $f(z)$ situés à l'intérieur de S.

Ce point important établi, voici maintenant d'autres conséquences de notre résultat. Faisons grandir le contour S et représentons l'intégrale J par la formule :

$$J = \frac{\lambda_\sigma}{2\pi}\,\frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)},$$

ζ désignant l'affixe d'un point situé sur le contour S et σ son périmètre. Si on suppose en particulier que ce contour soit un cercle de rayon R dont le centre est à l'origine, on aura $\sigma = 2\pi R$, $\zeta = Re^{i\theta}$; et par suite :

$$J = \frac{\lambda R f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - x}.$$

Admettons maintenant que pour des valeurs indéfiniment croissantes de R, le module de la fonction $f(\zeta)$ diminue indéfiniment ; J tendra vers zéro avec $\frac{1}{R}$, et sera nulle pour $R = \infty$, on aura dans tout le plan, la formule :

$$f(x) = \Sigma G_a\left(\frac{1}{x-a}\right).$$

C'est là une expression analytique de $f(x)$, subsistant pour tous les points du plan, alors même que la fonction admet un nombre infini de discontinuités ; ce qui montre que dans ce cas la série $\Sigma G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ est nécessairement convergente.

Nous l'appliquerons au cas de $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, qui remplit la condition précédente ; en effet

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

et si l'on fait $x = p + iq$, on voit que q augmentant indéfiniment en valeur absolue, le module de $\sin x$ augmentera aussi indéfiniment, et celui de $\frac{1}{\sin x}$ tendra vers zéro.

Ceci posé, on voit que les quantités a sont égales à $n\pi$, n désignant un entier quelconque, positif, négatif ou nul. Pour calculer ensuite les fonctions G, remarquons que le quotient $\frac{x - n\pi}{\sin x}$ a une limite finie, quand x tend vers $n\pi$; par suite la fonction correspondante $G_n\left(\frac{1}{x - n\pi}\right)$ se réduit à une fraction simple $\frac{A_n}{x - n\pi}$. Le coefficient A_n

s'obtient immédiatement par la règle connue, qui nous donne:

$$\lim \left[\frac{x - n\pi}{\sin x} \right]_{x=n\pi} = \frac{1}{\cos n\pi} = (-1)^n.$$

On a donc $A_n = (-1)^n$, et par suite cette formule:

$$\frac{1}{\sin x} = \Sigma \frac{(-1)^n}{x - n\pi},$$

où n prend toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Il est important de remarquer que l'expression analytique d'une fonction que nous venons d'appliquer a été obtenue par une intégration effectuée le long d'une circonférence de rayon R ayant son centre à l'origine; on observera aussi que les pôles de la fonction $\frac{1}{\sin x}$ sont situés sur l'axe Ox, symétriquement par rapport à l'origine; de sorte que le cercle de rayon R contient un nombre égal de points de discontinuités correspondant à des valeurs positives et à des valeurs négatives de n. Il en résulte que la série $\Sigma \frac{(-1)^n}{x - n\pi}$ doit être envisagée comme la limite, pour V infiniment grand de la somme

$$\sum_{n=-V}^{n=+V} \frac{(-1)^n}{x - n\pi},$$

où entrent autant de termes correspondant à des valeurs positives de n que de termes correspondant à des valeurs négatives; ainsi, et pour plus de précision, nous écrirons:

$$\frac{1}{\sin x} = \lim \left[\sum_{-V}^{+V} \frac{(-1)^n}{x - n\pi} \right]_{V=\infty}.$$

La nécessité de cette remarque est évidente d'après l'analyse même qui nous a conduits à notre résultat.

Maintenant, nous remarquerons que la formule à laquelle nous venons de parvenir met immédiatement en évidence la périodicité de la fonction $\sin x$. En remplaçant, en effet, x par $x + \pi$ dans la série obtenue, et étendant la sommation jusqu'à l'infini, l'expression ne fait que changer de signe; donc

$$\sin(x + \pi) = -\sin x,$$

et par conséquent

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

On peut, d'ailleurs donner à l'expression précédente la forme analytique d'une somme d'une série absolument convergente.

Écrivons, en effet, en groupant comme il suit les termes que nous prenons en nombre limité:

$$\frac{1}{\sin x} = \lim \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{2\pi + x} + \frac{1}{4\pi + x} + \cdots\cdots + \frac{1}{2V\pi + x} \\ \quad - \frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{4\pi - x} - \cdots\cdots - \frac{1}{2V\pi - x} \\ \quad + \frac{1}{\pi - x} + \frac{1}{3\pi - x} + \cdots\cdots + \frac{1}{(2V+1)\pi - x} \\ \quad - \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{3\pi + x} - \cdots\cdots - \frac{1}{(2V+1)\pi + x} \end{array} \right]_{V=\infty}.$$

Chacune des séries écrites sur ces quatre lignes a une somme infinie, mais en ajoutant les termes correspondants dans les deux premières lignes, puis dans les deux dernières, il vient :

$$\frac{1}{\sin x} = \lim \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{2x}{4\pi^2 - x^2} - \cdots\cdots\cdots - \frac{2x}{(2\nu\pi)^2 - x^2} \\ + \frac{2x}{\pi^2 - x^2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{2x}{[(2\nu+1)\pi]^2 - x^2} \end{array} \right]_{\nu=\infty}.$$

et l'on a pour représenter $\frac{1}{\sin x}$ la somme d'une seule série absolument convergente, à savoir :

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

Revenons à la formule

$$f(x) = \Sigma G_a \left(\frac{1}{x-a}\right),$$

qui suppose la condition que le module de $f(x)$, pour $x = Re^{i\theta}$ décroisse jusqu'à zéro, lorsque R augmente indéfiniment. On peut facilement la généraliser, et en déduire une autre qui s'applique à un cas plus étendu. Posons, en effet, $F(x) = \frac{f(x)}{x^n}$, et supposons que le module de $F(x)$, pour $x = Re^{i\theta}$ tende vers zéro quand R croît au-delà de toute limite. Alors en appliquant le résultat précédent, on aura :

$$F(x) = \Sigma G_a \left(\frac{1}{x-a}\right)$$

d'où

$$f(x) = x^n \Sigma G_a \left(\frac{1}{x-a}\right)$$

Or les quantités a représentent ici les discontinuités de $F(x)$; ce sont donc celles de $f(x)$, et en outre $x = 0$, qui est un pôle d'ordre n de multiplicité. La fonction $G_0\left(\frac{1}{x}\right)$ qui lui correspond sera par suite un polynôme en $\frac{1}{x}$ du degré n, et son produit par x^n donnera un polynôme en x du degré $n-1$: $P(x)$. En remarquant maintenant que $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ est une série ordonnée suivant les puissances positives croissantes de $\frac{1}{x-a}$, on voit que $x^n G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ ou bien $[(x-a)+a]^n G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ conduit à un polynôme en x du degré $n-1$, $P_a(x)$, augmenté d'une série analogue à $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$, que nous désignerons par $Q_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$, de sorte que la formule convenant au cas plus général que nous envisageons sera :

$$f(x) = P(x) + \Sigma \left[P_a(x) + Q_a\left(\frac{1}{x-a}\right) \right].$$

Nous voyons ainsi que $f(x)$ est égal à un polynôme entier de degré $n-1$, et à une somme de termes formant nécessairement une série convergente, chacun d'eux étant égal à un polynôme entier de degré $n-1$ augmenté d'une fonction holomorphe de $\frac{1}{x-a}$.

Appliquons ce résultat à la fonction $f(x) = \operatorname{colg} x$. Or on a :

$$\operatorname{colg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = i \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1}.$$

et faisant $x = p + iq$, on voit aque q croissant indéfiniment en valeur absolue, $\operatorname{colg} x$

tend vers $\pm i$ selon le signe de q. Le module de $\operatorname{cotg} x$ tend donc vers une limite finie égale à l'unité, quand x augmente indéfiniment ; par suite $\frac{\operatorname{cotg} x}{x}$ est une fonction telle que son module pour $Re^{i\theta}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{R}$, et nous pouvons appliquer à $\operatorname{cotg} x$ la formule précédente, en y faisant $n=1$. Les discontinuités de la fonction $\frac{\operatorname{cotg} x}{x}$ sont données par $x = n\pi$, où n désigne un entier quelconque ; ce sont des pôles, dont l'ordre de multiplicité est 1, la quantité $\frac{(x-n\pi)\operatorname{cotg} x}{x}$, ayant une valeur finie, à savoir $\frac{1}{n\pi}$, lorsqu'on y fait $x = n\pi$.

Pour trouver en outre le terme qui correspond au pôle $x=0$, écrivons la fonction sous la forme:

$$\frac{\operatorname{cotg} x}{x} = \frac{\cos x}{x \sin x} = \frac{1 - \frac{x^2}{1.2} + \dots\dots}{\frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{1.2.3} + \dots\dots}$$

On voit alors que le produit de $\frac{\operatorname{cotg} x}{x}$ par x^2 tend vers 1 lorsque x tend vers zéro ; le terme cherché est donc $\frac{1}{x^2}$, et il n'y en a point d'autre, la fonction étant paire. Nous avons donc la formule :

$$\frac{\operatorname{cotg} x}{x} = \frac{1}{x^2} + \Sigma \frac{1}{n\pi(x-n\pi)},$$

d'où

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} \Sigma \frac{(x-n\pi)+n\pi}{n\pi(x-n\pi)}$$

$$= \frac{1}{x} + \Sigma \left[\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{x-n\pi}\right].$$

Comme dans le cas de $\frac{1}{\sin x}$, il faut écrire pour plus de précision :

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} + \lim \left[\sum_{-\nu}^{+\nu} \left(\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{x-n\pi}\right)\right]_{\nu=\infty}.$$

et l'on en déduit, sous forme de série absolument convergente :

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}\right).$$

Mais revenons à l'expression :

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} + \Sigma \left(\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{x-n\pi}\right);$$

il est facile d'en conclure la décomposition de $\sin x$ en facteurs primaires, obtenue par M. Weierstrass. Remplaçons, en effet, x par πx ; multiplions par dx et intégrons à partir de $x=0$ les deux membres. On a successivement :

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{x} + \Sigma \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{x-n}\right),$$

puis,

$$\log \frac{\sin \pi x}{x} - \log \pi = \Sigma \left[\frac{x}{n} + \log\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right]$$

et enfin :

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \Pi \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}\right].$$

Il est ainsi démontré, comme nous l'avions annoncé, que la fonction G(x) entrant dans le facteur exponentiel $e^{G(x)}$ se trouve être égale à zéro.

Nous arrivons maintenant à la proposition fondamentale de cette théorie, à laquelle est attaché dorénavant le nom de M. Mittag-Leffler. Le jeune et savant géomètre n'avait primitivement démontré son théorème que dans le cas des fonctions qui admettent uniquement des discontinuités polaires; M. Weierstrass simplifia ensuite considérablement la démonstration de cette proposition particulière; enfin, il y a quelques mois seulement, M. Mittag-Leffler reconnut que la méthode de M. Weierstrass s'étendait d'elle-même aux fonctions admettant un nombre infini de pôles ou points essentiels, et parvenait ainsi à l'expression analytique des fonctions uniformes dans toute leur généralité. Les résultats de ces dernières recherches se trouvent dans les Comptes-Rendus de l'Académie des sciences pour les premiers mois de l'année 1882. Signalons encore que presqu'en même temps que M. Mittag-Leffler, mais un peu après, M. Casorati, professeur à l'université de Pavie, arrivait au même résultat, c'est-à-dire à l'extension de la démonstration de M. Weierstrass aux fonctions qui ont un nombre infini de points essentiels; le travail de l'habile analyste intitulé: «Oggimmé a recenti lavori dei signori Weierstrass e Mittag-Leffler sulle funzioni di una variabile complessa», se trouve dans les Annali di Mathematica de Milan, T. X, p. 262. Voici une première remarque sur laquelle repose la méthode que nous allons exposer.

Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ les affixes des points de discontinuité d'une fonction uniforme quelconque $f(x)$, rangées par ordre de module croissant, et supposons qu'on ait la condition:

$$\lim \operatorname{mod} a_n = \infty \quad \text{pour } n \text{ infini}.$$

J'envisage la somme des fractions simples en nombre infini:

$$\sum_1^\infty \frac{A_n}{x - a_n},$$

où les numérateurs A_n sont des constantes quelconques.

En raisonnant, comme nous l'avons fait quand nous avons traité de la décomposition des fonctions holomorphes en facteurs primaires, on voit d'abord que cette série sera convergente dans tout le plan, sauf aux points de discontinuité a, et représentera une fonction analytique, si la suite $\Sigma \operatorname{mod}\left(\frac{A_n}{a_n}\right)$ est elle-même convergente.

Supposons que cette condition ne soit plus remplie, mais qu'on puisse trouver un nombre entier positif ω tel que la série $\Sigma \operatorname{mod} \frac{A_n}{a_n^\omega}$ soit convergente. Posons alors:

$$\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \ldots\ldots + \frac{x^{\omega-2}}{a^{\omega-1}} = P_\omega(x),$$

d'où:

$$\frac{1}{x-a} = -P_\omega(x) + \frac{x^{\omega-1}}{a^{\omega-1}(x-a)};$$

et considérant la nouvelle série :

$$\Sigma A_n \left[\frac{1}{x-a_n} + P_\omega(x) \right] = \Sigma \frac{A_n x^{\omega-1}}{a_n^{\omega-1}(x-a_n)} .$$

On voit immédiatement dans l'hypothèse où nous nous plaçons qu'elle est convergente, et représente une fonction analytique dans tout le plan. Il suffit, pour s'en convaincre, de comparer les deux suites $\Sigma \operatorname{mod} \frac{A_n}{a_n^\omega}$, et $\Sigma \operatorname{mod} \frac{A_n}{a_n^\omega} \times \operatorname{mod} \frac{1}{1-\frac{x}{a_n}}$; il est clair que la convergence de la première entraîne celle de la seconde.

Considérons maintenant le cas où, quel que soit le nombre fixe ω, la série $\Sigma \operatorname{mod} \frac{A_n}{a_n^\omega}$ est toujours divergente ; nous allons montrer qu'en retranchant de chaque fraction $\frac{1}{x-a}$ un polynôme entier de degré variable on peut obtenir une série absolument convergente. Mais pour suivre dans ces nouvelles circonstances l'idée ingénieuse et féconde de M. Mittag-Leffler, des développements plus étendus sont nécessaires.

Posons

$$P_\nu(x) = \frac{1}{a_n} + \frac{x}{a_n^2} + \cdots\cdots + \frac{x^{\nu-2}}{a_n^{\nu-1}} ,$$

de sorte que

$$\frac{1}{x-a_n} = -P_\nu(x) + \frac{x^{\nu-1}}{a_n^{\nu-1}(x-a_n)} ;$$

la série que nous avons à considérer, a pour terme général :

$$A_n \left[\frac{1}{x-a_n} + P_\nu(x) \right] = \frac{A_n x^{\nu-1}}{a_n^{\nu-1}(x-a_n)} ,$$

et il s'agit de déterminer ν en fonction de n, de telle sorte qu'elle soit convergente dans tout le plan.

En écrivant le terme général sous la forme $-\frac{1}{x} \frac{A_n x^\nu}{a_n^\nu (1-\frac{x}{a_n})}$, on voit immédiatement qu'il suffit de prendre ν de manière que la suite

$$\Sigma \frac{\operatorname{mod} A_n \cdot \operatorname{mod} x^\nu}{\operatorname{mod.} a_n^\nu}$$

soit convergente pour toute valeur de x. Posons à cet effet :

$$\operatorname{mod} A_n = (\operatorname{mod} a_n)^{\rho_n}$$

et partageons la série en deux autres S et S_1, en réunissant dans la première les termes où ρ_n est négatif ou nul, la seconde comprenant les termes où ρ_n est positif. Remplaçons ρ_n par $-\rho_n$, de manière à mettre le signe en évidence, on aura d'abord :

$$S = \Sigma \frac{\operatorname{mod} x^\nu}{(\operatorname{mod} a_n)^{\nu+\rho_n}} .$$

Or, il suffit de prendre $\nu = n$ pour rendre cette suite convergente ; on voit, en effet, que u_n désignant le terme général, on a : $\lim \sqrt[n]{u_n} = 0$.

Passons à la seconde série, où l'exposant primitif ρ_n est positif, à savoir :

$$S_1 = \Sigma \frac{\operatorname{mod} x^\nu}{(\operatorname{mod} a_n)^{\nu-\rho_n}} .$$

Nous poserons :

$$\mod a_n = (\mod a_{n-1})^{\alpha},$$

de sorte qu'on ait :

$$S_1 = \Sigma \frac{\mod x^{\nu}}{(\mod a_{n-1})^{\alpha(\nu-\rho_n)}},$$

et nous observerons que la quantité α qui est variable avec n, est toujours supérieure à l'unité.

Cela étant, je fais :

$$\alpha(\nu - \rho_n) = \nu + \beta_n,$$

β_n étant une quantité positive, ν sera alors égal à $\frac{\beta_n + \alpha\rho_n}{\alpha - 1}$; c'est donc une valeur positive, et on pourra prendre β_n de telle façon que ν soit un entier au moins égal à n ; la série est alors $\Sigma \frac{\mod x^{\nu}}{(\mod a_{n-1})^{\nu+\beta_n}}$, et l'on voit que la racine de degré n du terme général a encore pour limite zéro, en supposant $n = \infty$. Cette série est donc convergente.

Ainsi, $P_{\nu}(x)$, désignant un polynôme entier de degré variable, on peut toujours déterminer ce degré de sorte que la suite :

$$\Sigma A_n \left[P_{\nu}(x) + \frac{1}{x - a_n} \right]$$

soit convergente dans tout le plan.

Ce lemme établi, nous allons démontrer le théorème de M. Mittag-Leffler dans le cas où la fonction $f(z)$ admet un nombre infini de discontinuités polaires ou essentielles.

Nous partirons de la formule trouvée dans la dernière leçon :

$$G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right) = \int \frac{f(z)\,dz}{z - x},$$

a_n désignant une des discontinuités de $f(z)$, et l'intégration étant effectuée le long d'un cercle de centre a_n et de rayon ρ assez petit pour que ce cercle ne contienne pas d'autre point de discontinuité que le point a_n.

Remplaçons $\frac{1}{z - x}$ par l'expression :

$$\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \ldots + \frac{x^{\nu-2}}{z^{\nu-1}} + \frac{x^{\nu-1}}{z^{\nu-1}(z-x)}.$$

L'intégrale considérée s'exprime alors par un polynôme de degré $\nu - 2$ en x, $-P_{\nu}(x)$ augmenté d'un reste, et l'on a par conséquent :

$$G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right) = -P_{\nu}(x) + \frac{1}{x}\int \frac{x^{\nu} f(z)\,dz}{z^{\nu-1}(x - z)}.$$

Cela étant, on doit dans l'intégrale du second membre, poser $z = a_n + \rho e^{it}$, et effectuer l'intégration par rapport à t, entre les limites zéro et 2π.

La fonction sous le signe $\int$ devenant alors :

$$\frac{x^{\nu} f(a_n + \rho e^{it})\, i\rho e^{it}\, dt}{(a_n + \rho e^{it})^{\nu-1}(x - a_n - \rho e^{it})},$$

je dis qu'on peut disposer des entiers ν de manière que la série :

$$S = \Sigma \frac{x^\nu f(a_n + \rho e^{it})\, i\rho e^{it}}{(a_n + \rho e^{it})^{\nu-1}(x - a_n - \rho e^{it})}$$

étendue à toutes les valeurs de n soit une fonction analytique dans tout le plan.

Il suffit pour cela de rendre convergente la suite dont le terme général est :

$$\frac{\operatorname{mod} x^\nu . \operatorname{mod} f(a_n + \rho e^{it})\rho}{\operatorname{mod}(a_n + \rho e^{it})^\nu},$$

et l'on voit que les nombres ν étant déterminés à cet effet, la série S définit une fonction de t et x, et l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} S\, dt$$

ayant une valeur déterminée pour chaque point du plan, représente elle-même une fonction de la variable x.

Soit d'abord A_n le module maximum de la fonction $\rho f(a_n + \rho e^{it})$, le long du cercle qui sert de contour d'intégration, et remarquons ensuite qu'on a toujours

$$\operatorname{mod}(a_n + \rho e^{it}) > \operatorname{mod} a_n - \rho .$$

Le terme général de la série que nous devons rendre convergente pourra s'écrire, en désignant par θ un nombre positif, variable avec n, plus petit que l'unité :

$$\frac{\theta A_n \operatorname{mod} x^\nu}{(\operatorname{mod} a_n - \rho)^\nu}.$$

Or cette expression ne contient plus la variable t, et coïncide avec celle que nous avons considérée dans notre lemme. On peut donc prendre les entiers ν de telle manière que les conditions que nous voulions remplir soient satisfaites. Il en résulte que la série convergente :

$$\Sigma\left[P_\nu(x) + G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right)\right]$$

définit une fonction analytique dans tout le plan ; en la retranchant de $f(x)$, la différence n'ayant plus ni pôles ni points singuliers essentiels, sera simplement une fonction holomorphe $G(x)$, et nous avons ainsi la formule qui exprime le théorème de M. Mittag-Leffler, à savoir :

$$f(x) = \Sigma\left[G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right) + P_\nu(x)\right] + G(x).$$

C'est le résultat que nous avions en vue d'obtenir.

XIII^e Leçon.

Nous avons établi dans la dernière leçon la formule importante de M. Mittag-Leffler, qui donne l'expression analytique d'une fonction uniforme dans toute l'étendue du plan, et admettant un nombre fini ou infini de discontinuités polaires ou essentielles.

Lorsque la fonction considérée n'a comme discontinuités que des pôles, on peut parvenir à une autre expression générale, et en suivant une marche beaucoup plus simple comme nous allons le montrer.

Soient $a_1, a_2, \ldots$ les pôles de la fonction $f(x)$, qu'on suppose rangés par ordre de module croissant. Nous avons vu que le caractère analytique d'un pôle $x=a$ consiste en ce qu'il existe un nombre entier et positif n, tel que le produit $(x-a)^n f(x)$ soit fini pour $x=a$. Or, on a établi en traitant de la décomposition des fonctions holomorphes en facteurs primaires qu'il était toujours possible de construire une fonction $G(x)$ holomorphe dans tout le plan, s'évanouissant pour les valeurs $a_1, a_2, \ldots$ de la variable, et cela de telle sorte que les facteurs $1-\frac{x}{a_1}$, $1-\frac{x}{a_2}$, etc. aient des degrés de multiplicité donnés à l'avance. Prenons les degrés de multiplicité de ces facteurs égaux à ceux des pôles correspondants de la fonction $f(x)$; nous formerons ainsi une fonction $G(x)$ telle que le produit $f(x)G(x)$ n'offrira plus aucune discontinuité; ce sera donc une fonction $G_1(x)$ holomorphe dans tout le plan, et nous aurons par suite :

$$f(x) = \frac{G_1(x)}{G(x)}.$$

Ainsi toute fonction uniforme qui n'admet que des discontinuités polaires, en nombre d'ailleurs quelconque s'exprime par le quotient de deux fonctions holomorphes dans tout le plan.

Nous renverrons pour l'étude plus complète des fonctions uniformes, au mémoire célèbre de M. Weierstrass que nous avons précédemment cité, mais nous indiquerons encore avant de quitter ce sujet la remarque suivante :

Envisageons une fonction holomorphe $G(x)$, et remplaçons x par $\frac{1}{x}$. Dans le cas où $G(x)$ est un polynôme de degré n, la fonction $G\left(\frac{1}{x}\right)$ admettra le point $x=0$ comme pôle d'ordre n de multiplicité : nous dirons, en conséquence, que pour le polynôme $G(x)$ le point $x=\infty$ est un pôle d'ordre n de multiplicité. Si en second lieu $G(x)$ est une fonction transcendante, elle sera développable pour tous les points du plan en série ordonnée suivant les puissances positives croissantes de x ; la fonction $G\left(\frac{1}{x}\right)$ admettra donc $x=0$ comme point singulier essentiel, et nous dirons par suite que $G(x)$ admet $x=\infty$ comme point singulier essentiel. L'étude attentive des mémoires de MM. Weierstrass et Mittag-Leffler montre combien est utile en Analyse l'introduction de ces notions.

Enfin et en dernier lieu nous établirons un théorème d'une importance capitale, dû à Riemann, que nous allons énoncer et démontrer.

Si deux fonctions uniformes U et V qui ont un nombre quelconque fini ou infini de pôles ou points singuliers essentiels, coïncident le long d'un élément de grandeur finie, aussi petit qu'on le veut, elles sont nécessairement identiques.

Ce théorème a été démontré par l'illustre auteur à l'aide de l'équation $\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0$, et d'une proposition importante concernant cette équation, qu'on nomme le principe de Dirichlet; en voici une démonstration beaucoup plus simple, due à M. Picard.

Considérons la différence $U-V$; c'est une fonction uniforme qui est nulle le long de l'élément donné; elle sera nulle par suite pour tous les points situés à l'intérieur d'un contour ne renfermant aucune des discontinuités de U ou de V, car à l'intérieur d'un tel contour, $U-V$ est une fonction holomorphe. Agrandissons ce contour, en le faisant passer près d'un point de discontinuité a de U ou V; je dis que cette discontinuité, polaire ou essentielle, doit nécessairement disparaître dans la différence $U-V$. Ce ne peut être en effet un pôle pour cette différence, car à une distance suffisamment petite de ce point, la fonction devient plus grande que toute quantité donnée, et nous avons démontré qu'elle était nulle pour tous les points aussi voisins de a que l'on veut; ce ne peut être non plus un point essentiel, car dans le voisinage d'un tel point, une fonction uniforme est absolument indéterminée. La différence $U-V$ n'admet donc pas de discontinuités; elle est nulle le long d'un élément fini; elle est nulle par suite dans tout le plan; c'est ce qu'il s'agissait d'établir.

Le théorème de Riemann montre qu'une fonction donnée le long d'une ligne de grandeur finie, ne peut être étendue au-delà que d'une seule manière, si on lui impose la condition d'être uniforme et de n'avoir de discontinuités qu'en des points isolés. On peut ainsi le rapprocher de cette proposition élémentaire, qu'une portion aussi petite qu'on le veut d'une courbe algébrique de degré connu, la détermine complètement et dans toute son étendue.

L'étude de l'intégrale Eulérienne de seconde espèce va nous conduire à une application de ce théorème; nous en traiterons quelques points seulement.

Soit avec Legendre:

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx.$$

nous chercherons en premier lieu les valeurs de a pour lesquelles cette intégrale définit une fonction. Bornons-nous d'abord aux valeurs réelles; à la limite inférieure 0, la fonction sous le signe $\int$ est finie pour $a>1$, mais devient infinie pour $a\leq 1$, on voit donc que a doit être positif, pour que l'intégrale $\int_\varepsilon^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ ait une limite finie, lorsque ε tend vers zéro.

Cela étant, écrivons:

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx+\int_1^\infty x^{a-1}e^{-x}dx.$$

La première intégrale du second membre est finie, puisque $a>0$; la seconde va

en augmentant avec a, car pour toute valeur de x supérieure à 1, $x^{a-1}e^{-x}$ croît en même temps que a. Or, lorsque a est égal à un nombre entier $n+1$, on obtient immédiatement pour $\Gamma(n+1)$ la valeur finie

$$\Gamma(n+1) = 1.2.3.\ldots\ldots n.$$

Il en résulte nécessairement que pour toutes les valeurs positives de a, et pour celles-là seulement, l'intégrale $\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ définit une fonction $\Gamma(a)$.

Supposons maintenant a imaginaire, et de la forme $\alpha+i\beta$. Il vient alors:

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{\log x(\alpha-1+i\beta)}e^{-x}dx$$
$$= \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\cos\log(x^\beta)dx + i\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\sin\log(x^\beta)dx,$$

où le logarithme portant sur la quantité positive x^β est pris dans le sens arithmétique. On voit que les deux intégrales qui figurent dans le second membre ne seront finies qu'en supposant $\alpha > 0$. Cette condition qui est nécessaire est d'ailleurs suffisante; par conséquent, la fonction uniforme représentée par l'intégrale Eulérienne de seconde espèce n'a d'existence que dans la moitié du plan qui se trouve à droite de l'axe Oy.

De cette définition de la fonction $\Gamma(a)$ dans une moitié seulement du plan, M. Prym, professeur à Würzbourg, a montré dans un mémoire inséré dans le Journal de Borchardt (Tome LXXXII), qu'on pouvait conclure l'existence d'une fonction analytique, uniforme dans tout le plan, et qui coïncide avec la première dans l'espace situé à droite de Oy. C'est cette fonction que l'on appelle fonction Eulérienne de seconde espèce; on la représente toujours par $\Gamma(a)$.

Mais avant l'éminent professeur de Würzbourg, M. de Gasparis, directeur de l'observatoire de Naples, avait eu l'idée, pour calculer l'intégrale $\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$, de la partager en deux parties: $\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$, et $\int_1^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$, (Sul calcolo del valore della funzione $\Sigma\frac{1}{\Gamma(x)}$, Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Naples, Septembre 1867), et il en avait déduit plusieurs des propriétés obtenues plus tard par M. Prym. Cependant les conséquences de cette décomposition au point de vue de la conception de l'intégrale Eulérienne comme une fonction analytique, lui avaient échappé. Elles supposent, en effet, des notions moins communes alors qu'aujourd'hui sur la théorie générale des fonctions.

Posons:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx = P(a) + Q(a)$$

en faisant:

$$P(a) = \int_0^\omega x^{a-1}e^{-x}dx,$$
$$Q(a) = \int_\omega^\infty x^{a-1}e^{-x}dx,$$

ω désignant une fonction quelconque positive. L'intégrale $Q(a)$ définit une fonction analytique de a dans toute l'étendue du plan, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de a; nous avons vu, en effet plus haut que c'était la circonstance de la limite zéro de l'intégrale $\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ qui obligeait de supposer a positif. La fonction $Q(a)$

est donc finie, continue et uniforme dans tout le plan, c'est-à-dire une fonction holomorphe. La fonction $P(a)$ n'est donnée par l'intégrale $\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ que dans la moitié du plan à droite de Oy ; mais remplaçons e^{-x} par son développement en série convergente : $1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$ on obtient immédiatement l'expression suivante :

$$P(a) = \frac{\omega^a}{a} - \frac{\omega^{a+1}}{a+1} + \frac{1}{1,2}\,\frac{\omega^{a+2}}{a+2} - \ldots\ldots$$

ou bien : $$P(a) = \omega^a \left[\frac{1}{a} - \frac{\omega}{a+1} + \frac{\omega^2}{1.2\,(a+2)} - \frac{\omega^3}{1.2.3\,(a+3)} + \ldots\ldots)\right]$$

Or cette série tirée de l'intégrale $\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$, où il est nécessaire de supposer la partie réelle de a positive, est convergente, et même rapidement convergente pour toute valeur réelle ou imaginaire de a ; elle définit par suite une fonction analytique uniforme. En la désignant par $P(a)$ nous avons la formule :

$$\Gamma(a) = P(a) + Q(a),$$

qui nous donne l'expression générale de la fonction Eulérienne obtenue pour la première fois par M. Prym. On remarquera que $P(a)$ représente la partie fractionnaire ou méromorphe de $\Gamma(a)$, et met en évidence les pôles $a = 0, -1, -2, \ldots\ldots$ On voit de plus que les numérateurs des fractions partielles se réduisent à des constantes, et donnent pour les résidus les valeurs déterminées par M. Prym, si l'on fait en particulier $\omega = 1$. Dans cette hypothèse, la partie méromorphe et la partie entière de $\Gamma(a)$ deviennent :

$$P(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{1.2\,(a+2)} - \ldots\ldots + \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n\,(a+n)} + \ldots.$$

et $$Q(a) = \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Nous venons de passer d'une expression donnée par une intégrale définie dans une portion du plan, à une fonction analytique uniforme, dans tout le plan. On est porté naturellement à se demander si une pareille extension n'est possible que d'une seule manière. A cette question, répond immédiatement le théorème de Riemann démontré plus haut ; cette proposition nous prouve qu'il n'y a pas d'autre quantité que la fonction $\Gamma(a)$ telle que nous venons de l'obtenir, qui puisse coïncider avec la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$, lorsque cette intégrale définit une fonction.

Ceci posé, nous allons étudier les propriétés principales de la fonction Eulérienne en prenant comme point de départ, une représentation analytique de $\Gamma(a)$ qui a été donné par Gauss et dont elles se déduisent de la manière la plus facile. Cette représentation, il est juste de le dire, avait été obtenue bien antérieurement par Euler, dans un mémoire resté peu connu, et qui n'est point venu sous les yeux de Gauss.

Nous considérerons pour y arriver l'intégrale définie :

$$\int_0^\infty x^{a-1} dx = \frac{1}{a},$$

a désignant un nombre positif.

Changeons a en $a+1$; il vient :

$$\int_0^1 x^a dx = \frac{1}{a+1} .$$

Retranchons ces deux égalités membre à membre, nous avons :

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)dx = \frac{1}{a(a+1)} .$$

Répétons la même opération sur cette nouvelle égalité ; nous obtiendrons :

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^2 dx = \frac{2}{a(a+1)(a+2)}$$

et en général :

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^n dx = \frac{1.2.....n}{a(a+1)(a+2).....(a+n)} .$$

Maintenant remplaçons dans l'intégrale x par $\frac{x}{n}$; cette égalité devient :

$$\int_0^n x^{a-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = \frac{n^a}{a(1+\frac{a}{1})(1+\frac{a}{2})\cdots(1+\frac{a}{n})},$$

on en conclut en faisant croître n indéfiniment : (Voir Serret: Alg. Sup. II p. 200)

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx = \lim \left[\frac{n^a}{a(1+\frac{a}{1})\cdots\cdots(1+\frac{a}{n})}\right]_{n=\infty} .$$

c'est là la formule qui avait été obtenue par Euler ; elle a été retrouvée par Gauss et prise par le grand géomètre comme définition de la fonction qui nous occupe ; cette définition a l'avantage en effet de présenter une signification déterminée, quelle que soit la valeur positive ou négative, réelle ou imaginaire de a. C'est d'abord ce que nous allons montrer, en la prenant à cet effet sous la forme suivante :

$$\log \Gamma(a) = a \log n - \left[\log a + \log(1+\tfrac{a}{1}) + \cdots\cdots\cdots + \log(1+\tfrac{a}{n})\right] .$$

Nous conviendrons aussi que a étant réel ou imaginaire, on s'affranchit de l'indétermination relative aux valeurs multiples des logarithmes, en adoptant celle de ces valeurs qui s'évanouit lorsqu'on suppose $a=0$.

Cela étant, remplaçons avec Gauss $\log n$ par la somme :

$$\log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \cdots\cdots + \log \frac{n}{n-1} ;$$

nous pourrons alors écrire :

$$\begin{aligned}
\log a\,\Gamma(a) = &\left[a \log \tfrac{2}{1} - \log(1+\tfrac{a}{1})\right], \\
&+\left[a \log(1+\tfrac{1}{2}) - \log(1+\tfrac{a}{2})\right], \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+\left[a \log(1+\tfrac{1}{n}) - \log(1+\tfrac{a}{n})\right], \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

ou pour abréger :

$$\log a\Gamma'(a) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[a \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log\left(1+\frac{a}{n}\right) \right].$$

Nous allons montrer que cette série, due à Gudermann qui y était parvenu par une toute autre voie, est convergente pour toute valeur réelle ou imaginaire de a. Soit en effet :

$$f(x) = a\log(1+x) - \log(1+ax),$$

d'où :

$$f'(x) = \frac{x(a^2-a)}{(1+x)(1+ax)}.$$

En développant $f(x)$ par la formule de Mac-Laurin, et observant que pour a imaginaire, nous sommes convenus de prendre celle des dénominations du logarithme qui s'annule avec a, on aura $f(0) = 0$ et par suite :

$$f(x) = x\int_0^1 f'(tx)\,dt,$$

$$= x^2 \int_0^1 \frac{(a^2-a)\,dt}{(1+tx)(1+atx)}.$$

Employons maintenant la formule de M. Darboux ; en désignant par θ un nombre positif < 1, nous aurons :

$$f(x) = x^2 \frac{\lambda(a^2-a)}{(1+\theta x)(1+a\theta x)},$$

de sorte que le terme général de la série proposée peut s'écrire :

$$\frac{\lambda_n(a^2-a)}{(n+\theta n)(n+a\theta n)}.$$

Cette série est par suite convergente pour toute valeur réelle ou imaginaire de a. On a effectivement :

$$\mathrm{Mod}(n+\theta n)(n+a\theta_n) > n^2 - n \bmod a,$$

de sorte que la quantité précédente a pour limite supérieure :

$$\frac{\lambda_n(a^2-a)}{n^2 - n \bmod a},$$

qui est le terme général d'une série convergente.

Arrivons maintenant aux propriétés fondamentales de la fonction $\Gamma(a)$ que nous allons établir comme conséquences de la formule :

$$\log\Gamma'(a) = a\log n - \log a - \log\left(1+\frac{a}{1}\right) - \cdots\cdots - \log\left(1+\frac{a}{n}\right).$$

Prenant la dérivée des deux membres de cette égalité par rapport à a, il vient :

$$D_a \log\Gamma'(a) = \log n - \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \cdots\cdots - \frac{1}{a+n};$$

$D_a \log\Gamma'(a)$ est donc encore comme $\log\Gamma'(a)$ la différence finie de deux quantités qui augmentent sans limite.

Mais en dérivant une fois de plus, il vient :

$$D_a^2 \log \Gamma(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{(a+n)^2} + \cdots$$

égalité dans laquelle la série du second membre est toujours convergente, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de a. Ce résultat connu depuis Euler aurait pu faire découvrir la véritable nature de la fonction $\Gamma(a)$ comme fonction uniforme de la variable. Nous montrerons qu'on peut en conclure toutes ses propriétés et en premier lieu que la fonction $\frac{1}{\Gamma(a)}$ est holomorphe dans tout le plan, proposition qui a fait le sujet d'un des premiers travaux de M. Weierstrass (Journal de Crelle, Tome LI).

Reprenons en effet, l'équation :

$$D_a^2 \log \Gamma(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{(a+n)^2} + \cdots$$

Multiplions les deux membres par da, et intégrons entre les limites 1 et a, on aura :

$$D_a \log \Gamma(a) = -C + \left(1 - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n}\right) + \cdots,$$

et la série qui figure dans le second membre ayant pour terme général :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n} = \frac{a-1}{(n+1)(a+n)}$$

sera encore convergente. Quant à la constante $-C$, elle est évidemment égale à la valeur que prend pour $a=1$ la dérivée $D_a \log \Gamma(a)$, c'est-à-dire que l'on a :

$$C = -\Gamma'(1) = -\int_0^\infty \log x \cdot e^{-x}\, dx ;$$

cette quantité C est connue sous le nom de constante d'Euler.

Dans la formule que nous venons d'obtenir changeons a en $a+1$; il vient :

$$D_a \log \Gamma(a+1) = -C + \left(1 + \frac{1}{a+1}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{a+n}\right) + \cdots$$

Multiplions de nouveau par da et intégrons entre les limites 0 et a, on en conclut, sans ajouter de constante, les deux membres s'évanouissant par $a=0$:

$$\log \frac{1}{\Gamma(a+1)} = Ca + \left[\log(1+a) - a\right] + \cdots\cdots + \left[\log\left(1+\frac{a}{n}\right) - \frac{a}{n}\right] + \cdots$$

d'où :

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)} = e^{Ca} \Pi\left[\left(1+\frac{a}{n}\right) e^{-\frac{a}{n}}\right].$$

Ce résultat montre que $\frac{1}{\Gamma(a+1)}$ est une fonction holomorphe dans tout le plan, comme l'a établi pour la première fois M. Weierstrass, et en donne l'expression sous forme d'un produit de facteurs primaires.

Remarquons encore à l'égard de la constante d'Euler :

$$C = -\int_0^\infty \log x \cdot e^{-x}\, dx$$

qu'on peut d'abord écrire :

$$\int_0^\infty \log x . e^{-x} dx = \int_0^1 \log x . e^{-x} dx + \int_1^\infty \log x . e^{-x} dx ;$$

Observant ensuite que l'on a :

$$\int \log e^{-x} dx = \int \log x . d(1-e^{-x})$$
$$= \log x (1-e^{-x}) - \int \frac{1-e^{-x}}{x} dx ;$$

on en conclut pour la première intégrale l'expression suivante :

$$\int_0^1 \log x . e^{-x} dx = -\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx .$$

Quant à la seconde, nous emploierons la relation :

$$\int \log x . e^{-x} dx = -\int \log x . d(e^{-x})$$
$$= -\log x . e^{-x} + \int \frac{e^{-x}}{x} dx ,$$

qui donne :

$$\int_1^\infty \log x . e^{-x} dx = \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx ,$$

de sorte qu'il vient en dernier lieu :

$$C = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx - \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx .$$

Le premier terme de cette formule se trouve par la série :

$$1 - \frac{1}{1.2^2} + \frac{1}{1.2.3^2} - \frac{1}{1.2.3.4^2} + \ldots .$$

et le second est la valeur de la fonction $Q(a)$ pour $a = 0$. Mais c'est par d'autres moyens que le calcul d'une intégrale définie qu'on a obtenu la valeur approchée : $C = 0\,577\,2156\,649 \ldots$ dont il est fait souvent usage.

XIV^e Leçon.

Nous avons vu que $F(a)$ désignant la dérivée seconde de $\log \Gamma(a)$ par rapport à a, on avait :

$$F(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \ldots .$$

Cette fonction $\Gamma(a)$ est donc uniforme dans tout le plan ; et son expression est précisément celle que nous avons obtenue en général, pour les fonctions de cette nature. Elle a fait le sujet d'un des chapitres les plus intéressants du traité des intégrales Eulériennes de Legendre ; nous allons exposer cette analyse dont nous ferons ainsi la base de la théorie de la fonction Eulérienne de seconde espèce.

Nous établirons en premier lieu les relations suivantes auxquelles conduit naturellement la fonction $F(a)$.

Et d'abord, on voit immédiatement que l'on a :

$$F'(a+1) - F'(a) = -\frac{1}{a^2}.$$

On peut ensuite écrire :

$$F(a) + F(1-a) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(a+n)^2},$$

ce qui met en évidence dans le second membre une fonction périodique de a dont la période est l'unité. Or, en différentiant l'égalité :

$$\pi \operatorname{cotg} a\pi = \frac{1}{a} + \Sigma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{a-n}\right),$$

que nous avons établie plus haut, où n prend successivement toutes les valeurs entières, positives ou négatives, sauf zéro, il vient :

$$\left(\frac{\pi}{\sin a\pi}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \Sigma \frac{1}{(a+n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(a+n)^2}$$

et par conséquent :

$$F'(a) + F'(1-a) = \left(\frac{\pi}{\sin a\pi}\right)^2.$$

Considérons enfin la somme

$$F'(a) + F'\left(a+\frac{1}{n}\right) + F'\left(a+\frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots + F'\left(a+\frac{n-1}{n}\right);$$

On peut l'écrire :

$$\sum_{K=0}^{K=n-1} F'\left(a+\frac{K}{n}\right),$$

ou bien :

$$\Sigma\Sigma \frac{1}{\left(a+\frac{K}{n}+\nu\right)^2} = \Sigma\Sigma \frac{n^2}{(na+K+n\nu)^2},$$

k variant de 0 à $n-1$, et ν prenant toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Or l'expression $k+n\nu$ donne :

pour $k=0$, tous les multiples de n ;

pour $k=1$, ces multiples, augmentés de 1 :

pour $k=2$, ces multiples, augmentés de 2, et ainsi de suite ; finalement, pour $k=n-1$, on aura tous les multiples de n augmentés de $n-1$. Il en résulte évidemment que $k+n\nu$ peut prendre une valeur entière quelconque, et une fois seulement ; on peut donc écrire :

$$\Sigma\Sigma \frac{n^2}{(na+K+n\nu)^2} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \frac{n^2}{(na+\mu)^2} = n^2 F(na),$$

et l'on en conclut la relation :

$$F(a) + F\left(a+\frac{1}{n}\right) + \ldots\ldots + F\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = n^2 F(na).$$

Telles sont les trois propriétés fondamentales de $F(a)$; il est facile d'en déduire

les propriétés correspondantes de $\Gamma(a)$.

En premier lieu, reprenons l'égalité:

$$F(a+1)-F(a)=-\frac{1}{a^2}.$$

Intégrons deux fois; il vient:

$$\log\Gamma(a+1)=\log a+\log\Gamma(a)+Ca+C',$$

ou:

$$\log\frac{\Gamma(a+1)}{a\Gamma(a)}=Ca+C',$$

C et C' désignant deux constantes. Or, on a pour toute valeur entière de a, $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$, C et C' sont par suite nulles; et l'on en conclut quel que soit a:

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a).$$

En second lieu, considérons l'égalité

$$F(a)+F(1-a)=\left(\frac{\pi}{\sin a\pi}\right)^2.$$

En intégrant deux fois, nous obtenons:

$$\log\Gamma(a)+\log\Gamma(1-a)=\log\frac{\pi}{\sin a\pi}+Ca+C',$$

d'où:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}e^{Ca+C'}.$$

Pour déterminer C et C', multiplions les deux membres par a; il vient en observant que $\Gamma(a)=\Gamma(a+1)$:

$$\Gamma(1+a)\Gamma(1-a)=\frac{a\pi}{\sin a\pi}e^{Ca+C'}.$$

Le premier membre de cette égalité est une fonction paire de a; il en est de même de $\frac{a\pi}{\sin a\pi}$; donc $e^{Ca+C'}$ doit être aussi une fonction paire; par suite $C=0$. Faisons maintenant $a=0$; le premier membre se réduit à l'unité ainsi que $\frac{a\pi}{\sin a\pi}$; donc il vient $e^{C'}=1$, c'est-à-dire $C'=0$. Ainsi la deuxième propriété de la fonction $\Gamma(a)$ s'exprime par la formule

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Dans son excellente thèse sur la fonction $\Gamma(a)$, M. Bourguet remarque que ce théorème met immédiatement en évidence que la fonction $\frac{1}{\Gamma(a)}$ est holomorphe dans tout le plan. Ayant en effet,

$$\frac{1}{\Gamma(1-a)}=\frac{\Gamma(a)\sin a\pi}{\pi},$$

remplaçons dans le second membre $\Gamma(a)$ par $P(a)+Q(a)$. Le produit $P(a)\sin a\pi$, n'aura plus de pôles et $Q(a)$ étant holomorphe on voit qu'il en est de même de $\frac{1}{\Gamma(1-a)}$.

Nous pouvons encore tirer de la formule:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

une proposition importante donnée par Euler. Soit:

$$N=\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

on peut aussi écrire:

$$N = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right).\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

En multipliant et appliquant la formule précédente, il vient :

$$N^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}.\sin\frac{2\pi}{n}.\ldots\ldots\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Or, on sait par la Trigonométrie, que le dénominateur de cette expression est égal à $\frac{n}{2^{n-1}}$; nous avons par suite :

$$N = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.n^{-\frac{1}{2}}$$

En dernier lieu, considérons l'égalité

$$\Sigma_0^{n-1} F\left(x+\frac{K}{n}\right) = n^2 F(nx)$$

et intégrons deux fois ; nous obtenons ainsi la relation :

$$\Sigma_0^{n-1}\log\Gamma\left(a+\frac{K}{n}\right) = \log\Gamma(na) + Ca + C',$$

dans laquelle nous déterminerons d'abord la constante C'. A cet effet écrivons en retranchant $\log a$ des deux membres :

$$\Sigma_1^{n-1}\log\Gamma\left(a+\frac{K}{n}\right) = \log\frac{\Gamma(na)}{\Gamma(a)} + Ca + C',$$

et soit $a = 0$; le premier membre devient :

$$\Sigma_1^{n-1}\log\Gamma\left(\frac{K}{n}\right) = \log N = \log\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Pour trouver ensuite la valeur de $\frac{\Gamma(na)}{\Gamma(a)}$, nous observerons qu'on a :

$$\frac{\Gamma(na)}{\Gamma(a)} = \frac{na\,\Gamma(na)}{na\,\Gamma(a)} = \frac{\Gamma(na+1)}{n\Gamma(a+1)},$$

de sorte que pour $a = 0$, $\frac{\Gamma(na)}{\Gamma(a)}$ est égal à $\frac{1}{n}$. Il vient par conséquent :

$$C' = \log n + \log\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}\right] = \log\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}}\right].$$

Pour calculer C, nous changerons a en $a+1$ dans l'égalité

$$\Sigma_0^{n-1}\log\Gamma\left(a+\frac{K}{n}\right) = \log\Gamma(na) + Ca + C',$$

et nous retrancherons la nouvelle équation ainsi obtenue de la précédente. En employant la relation $\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$ on trouve pour le premier membre la quantité $\sum_0^{n-1}\log\left(a+\frac{K}{n}\right)$; le second s'obtient ensuite en remplaçant a par na, dans l'égalité.

$$\Gamma(a+n) = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)\Gamma(a).$$

Nous sommes ainsi amenés à la condition :

$$\Sigma_0^{n-1}\log\left(a+\frac{K}{n}\right) = \log\left[na(na+1)\ldots(na+n-2)\right] + C,$$

d'où l'on tire après une réduction facile :

$$C = -n\log n.$$

Par suite nous pouvons écrire :

$$\Sigma_0^{n-1}\log\Gamma\left(a+\frac{K}{n}\right) = \log\Gamma(na) - an\log n + \log\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}}\right],$$

et en passant des logarithmes aux nombres :

$$\Gamma(a).\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-an}\Gamma(na).$$

On remarquera que le quotient de $\Gamma(n\alpha)$ par le produit $\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)..\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)$ est holomorphe, pour $a=-\frac{K}{n}$, le rapport de $\Gamma(n\alpha)$ à $\Gamma\left(a+\frac{K}{n}\right)$ est la quantité finie : $\frac{(-1)^K}{n}\cdot\frac{1}{1.2\ldots K}$.

Après avoir ainsi établi les propriétés fondamentales de la fonction $\Gamma(a)$ nous considérerons un point d'une grande importance dans la théorie de cette transcendante, la détermination de sa valeur approchée, lorsqu'on attribue à la variable une valeur positive très grande. La voie a été ouverte dans cette recherche par Euler, qui a donné en supposant que a soit un nombre entier la formule suivante :

$$\log\Gamma(a)=\left(a-\frac{1}{2}\right)\log a-a+\log\sqrt{2\pi}+\frac{B_1}{1.2.a}-\frac{B_2}{2.4.a^3}+\frac{B_3}{5.6\,a^5}\cdot$$

Dans la série du second membre qui procède suivant les puissances descendantes de a, $B_1, B_2, \ldots$ désignent des coefficients numériques, définis par la condition :

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{B_1x^2}{1.2}-\frac{B_2x^4}{1.2.3.4}+\ldots\ldots-(-1)^n\frac{B_nx^{2n}}{1.2\ldots\ldots 2n}+\ldots$$

On leur donne le nom de **nombres de Bernouilli**, et les premiers ont pour valeur :

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},\ \text{etc}$$

Le résultat d'Euler a été retrouvé par Laplace, comme conséquence d'une méthode générale pour l'intégration par approximation des différentielles qui renferment des facteurs élevés à de grandes puissances (Théorie analytique des probabilités page 97). Et sous ce nouveau point de vue, il acquiert une plus grande généralité, la variable au lieu de représenter un nombre entier, étant quelconque. Mais l'expression de $\log\Gamma(a)$ sous cette forme présente la circonstance singulière que la série :

$$\frac{B_1}{1.2a}-\frac{B_2}{3.4a^3}+\frac{B_3}{5.6a^5}-\ldots\ldots$$

n'est convergente que dans ses premiers termes, et finit toujours par devenir divergente. Cette suite permet cependant de calculer le logarithme de $\Gamma(a)$, d'une manière parfaitement sure, pourvu qu'on s'en tienne à une approximation, dont la limite est déterminée par la valeur de a. Cauchy a donné le premier l'explication complète de cette singularité, en établissant le résultat de Laplace par une méthode entièrement rigoureuse. L'analyse du grand géomètre repose principalement sur une formule importante découverte par Binet :

$$\log\Gamma(a)=\left(a-\frac{1}{2}\right)\log a-a+\log\sqrt{2\pi}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\frac{\varphi(x)e^{ax}}{x^2}\,dx$$

où l'on suppose :

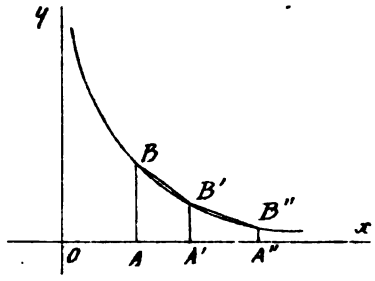
$$\varphi(x)=x-2-\frac{2x}{1-e^x}\cdot$$

Nous devons d'abord l'établir et elle s'obtient facilement comme il suit.

En partant de la relation :

$$F'(a) = D_a^2 \log \Gamma(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \cdots$$

qui nous a déjà conduits aux propriétés fondamentales de la fonction $\Gamma(a)$, nous remarquerons d'abord qu'il est possible d'obtenir par une construction géométrique simple la valeur approchée de $F(a)$, lorsque a est un nombre positif très grand.



Construisons en effet la courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est $y = \frac{1}{x^2}$, et envisageons à partir de l'abscisse $OA = a$, l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses, qui est donnée par l'intégrale $\int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}$.

La somme des trapèzes, $AA'BB'$, $A'A''B'B''$, etc. dans lesquels : $AA' = 1$, $A'A'' = 1$, etc. et par conséquent la série

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a+1)} + \frac{1}{(a+2)^2}\right] + \cdots = -\frac{1}{2a^2} + F(a),$$

donne comme on sait une expression approchée de cette aire. On a donc cette formule :

$$F(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2}$$

qui est d'autant plus exacte que a est plus grand. Pour le faire voir employons en effet l'identité suivante :

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}\right] = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2a^2(a+1)^2} \; ;$$

Si l'on y change successivement a en $a+1$, $a+2$, etc. et qu'on ajoute membre à membre, on en conclut la relation :

$$F(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + S,$$

en posant :

$$S = \frac{1}{2a^2(a+1)^2} + \frac{1}{2(a+1)^2(a+2)^2} + \cdots$$

On voit géométriquement que cette série a pour limite supérieure l'expression :

$$\int_a^\infty \frac{du}{2a^2(a+1)^2} + \frac{1}{2a^2(a+1)^2} = \frac{1}{6a^3} + \frac{1}{2a^4} + \cdots$$

ce qui montre clairement combien la différence entre $F(a)$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2}$ est petite quand a est très grand.

Mais, au lieu d'une limite, nous allons obtenir une expression exacte, à l'aide d'une intégrale définie.

Nous partirons dans ce but, de la formule :

$$\int_{-\infty}^{0} e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}, \quad \text{où } a \text{ est} > 0.$$

Différentions par rapport à a, il vient :

$$\int_{-\infty}^{0} x e^{ax}\,dx = -\frac{1}{a^2} \quad ;$$

on peut donc écrire :

$$\Gamma'(a) = -\sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{-\infty}^{0} x e^{(a+n)x}\,dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} x e^{ax}(1 + e^{x} + e^{2x} + \dots e^{nx} + \dots)\,dx,$$

et comme la série $1 + e^{x} + e^{2x} + \dots$ est convergente pour toute valeur de x comprise entre $-\infty$ et 0, nous obtenons finalement :

$$F(a) = -\int_{-\infty}^{0} \frac{x e^{ax}}{1 - e^{x}}\,dx .$$

On a d'ailleurs :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{ax}(x - 2)\,dx \quad ;$$

par suite la différence entre $F(a)$ et sa valeur approchée est égale à $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{ax}\varphi(x)\,dx$, en posant

$$\varphi(x) = x - 2 - \frac{2x}{1 - e^{x}} .$$

Nous remarquons à ce sujet que $F(a)$ est une fonction uniforme dans tout le plan, tandis que l'intégrale définie que nous venons d'obtenir pour son expression $-\int_{-\infty}^{0} \frac{x e^{ax}}{1 - e^{x}}\,dx$, n'existe qu'en supposant la partie réelle de a positive. C'est là un fait analytique bien digne de remarque, et en tout semblable à celui que nous avons observé à propos de la fonction $\Gamma'(a)$ elle-même. Cependant, l'expression de $F(a)$ par une intégrale est très utile, malgré la limitation de la variable qu'elle suppose. Elle va nous conduire en effet à l'expression de $\log \Gamma(a)$ découverte par Binet (17e cahier du Journal de l'école Polytechnique), que Cauchy a obtenue de son côté par une autre voie.

Voici, en premier lieu, une remarque au sujet de la fonction $\varphi(x)$. Le module de cette fonction ne tend pas vers zéro quand le module de x augmente indéfiniment ; mais le quotient

$$\frac{\varphi(x)}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x(1 - e^{x})}$$

jouit de cette propriété. Nous pouvons, par suite, en appliquant un théorème démontré précédemment, le décomposer en une somme d'un nombre infini de fractions simples. Les pôles de la fonction :

$$\frac{\varphi(x)}{x^2} = \frac{e^{x}(2 - x) - 2 - x}{x^2(1 - e^{x})}$$

sont $x = ni\pi$, où n est un nombre entier quelconque pair, sauf zéro. Pour $x = 0$, en effet, on voit, en développant en série les deux termes de la fraction précédente, que $\frac{\varphi(x)}{x^2}$ a la valeur finie $\frac{1}{6}$. Ces pôles sont d'ailleurs du premier ordre ; la limite de $\frac{\varphi(x)(x - ni\pi)}{x^2}$ étant $\frac{2}{ni\pi}$ quand on suppose $x = n\pi$.

De là résulte en réunissant les deux termes qui correspondent à des valeurs de n égales et de signe contraire, et remplaçant n par $2n$:

$$\frac{\varphi(x)}{x^2} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{1}{ni\pi} \frac{1}{x-2ni\pi} - \frac{1}{ni\pi} \frac{1}{x-2ni\pi} \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{4}{x^2+4n^2\pi^2} .$$

Bientôt on va voir l'usage de cette expression, en ce moment nous nous bornons à en conclure que $\frac{\varphi(x)}{x^2}$ est toujours positif et va en diminuant quand x augmente.

Ceci posé, revenons à l'égalité :

$$F'(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{ax} \varphi(x)\, dx ;$$

on en conclut la suivante :

$$D_a \log \Gamma(a) = \log a - \frac{1}{2a} + C + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{ax} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx .$$

où il est nécessaire, avant d'intégrer une seconde fois pour avoir $\Gamma(a)$ de déterminer la constante C. On pourrait chercher à y arriver en donnant à a une valeur particulière pour laquelle on connaîtrait $\Gamma(a)$; mais, en général, on ne sait point obtenir l'intégrale du second membre, aussi, nous allons suivre une autre voie.

Intégrons les deux membres de l'égalité proposée entre les limites a et $a+1$; nous obtenons :

$$\log \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = (a+1)\left[\log(a+1) - 1\right] - a(\log a - 1) - \frac{1}{2}\left[\log(a+1) - \log a\right] + C + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \left[e^{(a+1)x} - e^{ax}\right] \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx,$$

ou en remplaçant $\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}$ par a, et réduisant :

$$0 = \left(a + \frac{1}{2}\right) \log \frac{a+1}{a} - 1 + C + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \left[e^{(a+1)x} - e^{ax}\right] \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx .$$

Imaginons maintenant que a augmente sans limite ; en remplaçant $\log \frac{a+1}{a}$ par son développement en série, on voit que $\left(a + \frac{1}{2}\right) \log \frac{a+1}{a} - 1$ aura pour limite zéro. Je dis qu'il en est de même de l'intégrale du second membre.

En effet, x variant de 0 à $-\infty$, $\frac{\varphi(x)}{x^2}$, qui est une fonction paire de x, reste positive et va constamment en diminuant ; son maximum est $\frac{1}{6}$; il a lieu pour $x = 0$; quant à la quantité $e^{(a+1)x} - e^{ax}$, elle devient aussi petite que l'on veut, puisque entre les limites de l'intégration x est toujours négatif. Il en résulte par conséquent : $C = 0$.

En même temps nous voyons qu'on obtient la valeur de l'intégrale définie :

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \left[e^{(a+1)x} - e^{ax}\right] \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx = 1 - \left(a + \frac{1}{2}\right) \log \frac{a+1}{a} .$$

Nous indiquerons en quelques mots comment on parvient directement à ce résultat.

Observons qu'en remplaçant $\varphi(x)$ par sa valeur : $\frac{e^x(2-x) - 2 - x}{1 - e^x}$, la fonction sous le signe d'intégration devient :

$$e^{(a+1)x}\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) + e^{ax}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) .$$

Or il existe à l'égard des expressions de la forme $e^{\omega x} f(x)$, où $f(x)$ désigne une fonction rationnelle, une décomposition en éléments simples, analogue à celle des fonctions rationnelles elles-mêmes. C'est ainsi qu'on peut écrire :

$$e^{\omega x}\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = (1-2\omega)\frac{e^{\omega x}}{x} + 2D_x\left(\frac{e^{\omega x}}{x}\right),$$

$$e^{\omega x}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = (1-2\omega)\frac{e^{\omega x}}{x} - 2D_x\left(\frac{e^{\omega x}}{x}\right),$$

et au moyen de ces formules, en prenant successivement $\omega = a$ et $\omega = a+1$, on parvient en premier lieu à l'expression suivante :

$$\int\left[e^{(a+1)x} - e^{ax}\right]\frac{\varphi(x)}{x^2}dx = (2a+1)\int\frac{e^{ax} - e^{(a+1)x}}{x}dx + 2\,\frac{e^{(a+1)x} - e^{ax}}{x}.$$

Prenant ensuite pour limites $x = -\infty$ et $x = 0$, nous obtenons immédiatement :

$$\int_{-\infty}^{0}\left[e^{(a+1)x} - e^{ax}\right]\frac{\varphi(x)}{x^2}dx = (2a+1)\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{ax} - e^{(a+1)x}}{x}dx + 2\ ;$$

en divisant par -2 et employant la valeur connue de l'intégrale définie qui figure dans le second membre, on obtient donc :

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\left[e^{(a+1)x} - e^{ax}\right]\frac{\varphi(x)}{x^2}dx = 1 - \left(a + \frac{1}{2}\right)\log\frac{a+1}{a}.$$

C'est le résultat qui avait été trouvé précédemment.

XV^ème Leçon.

Nous avons obtenu dans la dernière leçon la formule :

$$D_a \log\Gamma(a) = \log a - \frac{1}{2a} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{ax}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

Multiplions encore les deux membres par da, et intégrons, il vient :

$$\log\Gamma(a) = a(\log a - 1) - \frac{1}{2}\log a + C + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{ax}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx.$$

Pour déterminer la constante C, nous suivrons la même marche que plus haut, en intégrant l'équation précédente entre les limites a et $a+1$. Le premier membre nous conduit ainsi à l'intégrale définie $\int_a^{a+1}\log\Gamma(a)\,da$, qui a été obtenue pour la première fois par Raabe. Nous allons en trouver la valeur en employant le procédé donné par M. Bertrand (Traité de Calcul Différentiel et Intégral, tome II). Nous partirons pour cela de la troisième des propriétés fondamentales

de la fonction $\Gamma(a)$, à savoir:

$$\sum_{K=0}^{K=n-1} \log\Gamma\left(a+\frac{K}{n}\right) = \log\Gamma(na) - na\log n + \log\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}\right].$$

Multiplions par $\frac{1}{n}$; et faisons croître n indéfiniment, en posant $da = \frac{1}{n}$; le premier membre devient évidemment $\int_a^{a+1} \log\Gamma(a)\,da$, et le second s'exprime ainsi:

$$\lim\left[\frac{1}{n}\log\Gamma(na) - a\log n\right]_{n=\infty} + \log\sqrt{2\pi}.$$

Cette limite se lire facilement comme on va voir de la formule établie tout-à-l'heure:

$$\log\Gamma(a) = (a-\tfrac{1}{2})\log a - a + C + J,$$

où l'on écrit pour abréger, $J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{ax}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx$. Changeons dans cette égalité a en na, désignons par J_n ce que devient l'intégrale J et multiplions par $\frac{1}{n}$. Nous en conclurons:

$$\frac{1}{n}\log\Gamma(na) = (a-\tfrac{1}{2n})\log na - a + \frac{C+J_n}{n}.$$

En faisant croître n indéfiniment, et supprimant les termes infiniment petits, nous trouvons pour la quantité cherchée,

$$\lim\left[\frac{1}{n}\log\Gamma(na) - a\log n\right]_{n=\infty} = a(\log a - 1).$$

et il en résulte pour l'intégrale de Raabe, l'expression suivante:

$$\int_a^{a+1}\log\Gamma(a)\,da = a(\log a - 1) + \log\sqrt{2\pi}.$$

Ceci posé, j'intègre les deux membres de l'équation

$$\log\Gamma(a) = (a-\tfrac{1}{2})\log a - a + C + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{ax}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx$$

entre les limites a et $a+1$, ce qui donne:

$$\log\sqrt{2\pi} + a(\log a - 1) = C + \int_a^{a+1}\left[(a-\tfrac{1}{2})\log a - a\right]da + J_1,$$

en posant

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\left[e^{(a+1)x} - e^{ax}\right]\frac{\varphi(x)}{x^3}\,dx,$$

et je remarquerai que cette quantité est nulle, pour a infini.

Maintenant, nous ne calculerons pas la valeur de l'intégrale $\int_a^{a+1}\left[(a-\frac{1}{2})\log a - a\right]dx$; il nous suffira pour notre objet d'en avoir le développement en série suivant les puissances descendantes de a.

Soit en général l'expression $\int_a^{a+1} f(x)\,dx$; en posant $x = a + t$, elle devient:

$$\int_0^1 f(a+t)\,dt = \int_0^1\left[f(a) + f'(a)\frac{t}{1} + f''(a)\frac{t^2}{1.2} + \cdots\right]dt;$$

cela étant, nous avons dans le cas qui nous occupe:

$$f(a) = (a-\tfrac{1}{2})\log a - a,$$
$$f'(a) = \log a - \frac{1}{2a},$$
$$f''(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2},$$

et l'on en conclut ce résultat:

$$\int_a^{a+1}\left[(a-\tfrac{1}{2})\log a - a\right]da = a\log a - a + \psi(a),$$

$\psi(a)$ désignant une fonction de a qui s'annule lorsque a augmente au-delà de toute limite. Nous avons donc:

$$\log\sqrt{2\pi} + a(\log a - 1) = a(\log a - 1) + \psi(a) + C + J,$$

ou simplement :

$$\log\sqrt{2\pi} = \psi(a) + C + J;$$

et en supposant a infini, il vient :

$$C = \log\sqrt{2\pi};$$

ce qui permet d'écrire :

$$\log\Gamma(a) = (a - \tfrac{1}{2})\log a - a + \log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\circ} e^{ax}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx.$$

C'est à Binet qu'est due la découverte de ce beau et important résultat. Il montre que l'expression :

$$(a - \tfrac{1}{2})\log a - a + \log\sqrt{2\pi},$$

est la valeur asymptotique de $\log\Gamma(a)$, puisque l'intégrale $\int_{-\infty}^{\circ} e^{ax}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx$, diminue lorsque a augmente, et peut devenir plus petite que toute quantité donnée. Nous remarquerons que cette valeur asymptotique, ni même l'exponentielle :

$$e^{(a-\frac{1}{2})\log a - a + \log\sqrt{2\pi}} = \left(\frac{a}{e}\right)^a\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

ne sont des fonctions uniformes ou seulement algébriques de la variable. De telles fonctions en effet ne peuvent jamais être très grandes pour des valeurs positives et très petites pour de grandes valeurs négatives de la variable, ainsi qu'il arrive pour l'exponentielle et la fonction Eulérienne.

En revenant en effet à l'expression de M. Prym :

$$\Gamma(a) = P(a) + Q(a),$$

on voit que la partie holomorphe, $Q(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx$, devient infiniment grande ou infiniment petite, lorsque la variable croît positivement ou négativement, tandis que la partie méromorphe $P(a)$ décroît dans les deux cas.

Voici maintenant d'une manière succincte, les conséquences que Cauchy a déduites de la formule de Binet.

Remarquons d'abord qu'on tire de l'équation donnée précédemment pour définir les nombres de Bernoulli, à savoir :

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{1.2} - \frac{B_2 x^4}{1.2.3.4} + \cdots\cdots - (-1)^n\frac{B_n x^{2n+2}}{1.2\ldots 2n+2} + \cdots$$

le développement de $\varphi(x)$, sous cette forme :

$$\frac{\varphi(x)}{2x^2} = \frac{B_1}{1.2} - \frac{B_2 x^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

la série n'étant convergente qu'autant que le module de la variable est moindre que 2π, attendu que le pôle de $\frac{\varphi(x)}{x^2}$ le plus proche de l'origine, a pour module 2π. Nous allons cependant faire usage de ce développement pour calculer l'intégrale $J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\circ} e^{ax}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx$, où la variable croît de $-\infty$ à 0, mais en ayant le soin de n'employer qu'un nombre limité de termes du développement. C'est

en ce moment que la formule, établie dans la leçon précédente

$$\frac{\varphi(x)}{x^2} = \sum_1^\infty \frac{4}{x^2 + n^2\pi}$$

nous est surtout utile. Ayant en effet, sous forme finie :

$$\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{x^2}{a^4} + \frac{x^4}{a^6} - \dots \pm \frac{x^{2\nu}}{a^{2\nu}(x^2+a^2)}$$

nous remarquons que le terme complémentaire $\frac{x^{2\nu}}{a^{2\nu}(x^2+a^2)}$, est toujours plus petit que $\frac{x^{2\nu}}{a^{2\nu+2}}$, de sorte qu'il est permis d'écrire, en désignant par θ un nombre inférieur à l'unité :

$$\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{x^2}{a^4} + \dots \pm \frac{x^{2\nu-2}}{a^{2\nu}} \mp \frac{\theta x^{2\nu}}{a^{2\nu+2}}.$$

Soit donc successivement, $a = 2\pi$, 4π, etc. et ajoutons membre à membre les égalités ainsi obtenues, nous en conclurons qu'on a avec un nombre fini les termes :

$$\frac{\varphi(x)}{2x^2} = \frac{B_1}{1.2} - \frac{B_2 x^2}{1.2.3.4} + \dots \pm \frac{B_\nu x^{2\nu-2}}{1.2\dots 2\nu} \mp \frac{\varepsilon B_{\nu+1} x^{2\nu}}{1.2\dots 2\nu+2}$$

la quantité désignée par ε, étant inférieure à l'unité. Il suffit maintenant pour parvenir à l'expression de J, de multiplier les deux membres par $e^{ax}dx$, et d'intégrer entre les limites $-\infty$ et zéro ; la formule :

$$\int_{-\infty}^{0} e^{ax} x^n dx = \frac{1.2\dots n}{a^{n+1}}$$

donne immédiatement :

$$J = \frac{B_1}{1.2.a} - \frac{B_2}{2.4.a^3} + \dots \pm \frac{B_\nu}{2\nu-1.2\nu.a^{2\nu-1}} \mp \frac{\varepsilon B_{\nu+1}}{(2\nu+1)(2\nu+2)a^{2\nu+1}}$$

Cette série est divergente, les termes vont d'abord en décroissant, pour augmenter ensuite au-delà de toute limite, mais l'expression précédente fait voir qu'en s'arrêtant à un terme de rang quelconque, le terme qui suit donne une limite supérieure de l'erreur commise. On obtiendra par suite la plus grande approximation qu'elle puisse donner, en déterminant le terme le plus petit, et employant tous ceux qui précèdent. Je renvoie pour ce point intéressant à la thèse de M. Bourguet, que j'ai déjà citée, sur le calcul des intégrales Eulériennes, et je me borne à indiquer le résultat obtenu, que le rang du terme minimum ν, est donné par l'entier inférieur à : $\pi a + \frac{3}{4} + \frac{1}{32\pi a}$.

Nous terminerons cette étude de l'intégrale Eulérienne, par quelques applications qui s'y rattachent, des propositions précédemment établies sur les fonctions uniformes.

Je considère d'abord l'expression suivante :

$$f(x) = \frac{\Gamma(x+a)\Gamma(x+b)\dots\Gamma(x+l)}{\Gamma(x+a')\Gamma(x+b')\dots\Gamma(x+l')}$$

où je suppose les constantes a, a', b, b', etc. toutes réelles ; je désignerai par μ le nombre des facteurs tant au numérateur qu'au dénominateur, et je ferai pour abréger :

$$s' = a+b+\ldots\ldots+l\,,$$
$$s = a'+b'+\ldots\ldots+l'.$$

Cela étant, les pôles de $f(x)$ seront ceux des fonctions $\Gamma(x+a)$, $\Gamma(x+b)$, ... $\Gamma(x+l)$, c'est-à-dire $x=-(a+n)$, $x=-(b+n)$, ... $x=-(l+n)$, n étant zéro ou un nombre entier positif quelconque. Représentons par A_n, B_n, ... L_n les résidus qui leur correspondent, je dis qu'il existe toujours un exposant i, tel que les séries:

$$\Sigma\frac{A_n}{(n+a)^i}\,,\qquad \Sigma\frac{B_n}{(n+b)^i}\,,\qquad \Sigma\frac{L_n}{(n+l)^i}$$

soient convergentes.

Raisonnons pour fixer les idées sur la première, et employons l'expression de A_n à savoir:

$$A_n = \frac{(-1)^n}{1.2.\ldots n}\cdot\frac{\Gamma(b-a-n)\,\Gamma(c-a-n)\ldots\Gamma(l-a-n)}{\Gamma(a'-a-n)\,\Gamma(b'-a-n)\ldots\Gamma(l'-a-n)}\,.$$

En la comparant à A_{n-1}, on en tire facilement la relation:

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{(n+a-a')(n+a-b')\ldots(n+a-l')}{n(n+a-b)\ldots(n+a-l)}$$

et si nous faisons pour un moment:
$$U_n = \frac{A_n}{(n+a)^i}\,,$$

on voit qu'on aura:

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{(n+a-1)^i(n+a-a')(n+a-b')\ldots(n+a-l')}{n(n+a)^i(n+a-b)\ldots(n+a-l)}\,.$$

Nous pouvons donc immédiatement obtenir la condition de convergence de la série $\Sigma\frac{A_n}{(n+a)^i}$, en appliquant la règle de Gauss. Remarquant à cet effet qu'on a:

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{n^{\mu+i}+n^{\mu+i-1}[(\mu+i)a-s'-i]+\ldots\ldots}{n^{\mu+i}+n^{\mu+i-1}[(\mu+i)a-s]+\ldots\ldots}$$

nous trouvons d'après cette règle:

$$(\mu+i)a-s'-i-[(\mu+i)a-s]+1<0\,,$$

et par conséquent:

$$i>s-s'+1\,.$$

On doit donc prendre pour l'exposant i le nombre entier immédiatement supérieur à $s-s'+1$, et de la forme même de cette condition il résulte que les autres séries: $\Sigma\frac{B_n}{(n+b)^i}$, ... $\Sigma\frac{L_n}{(n+l)^i}$, seront convergentes comme la première. J'ajoute enfin que dans le cas général où les constantes a, a', l, l', etc. sont imaginaires de sorte qu'on ait:

$$s = \sigma+\sigma_1\sqrt{-1}\,,$$
$$s' = \sigma'+\sigma_1'\sqrt{-1}\,.$$

une extension facile de la règle de Gauss, montre qu'il faut supposer alors:

$$i>\sigma-\sigma'+1\,,$$

et cette condition comprend comme cas particulier celle que nous avons précédemment obtenue.

Soit en particulier $S = S'$, nous aurons $i = 2$, et la partie méromorphe de la fonction que nous avons considérée, aura pour expression:

$$\Sigma A_n \left(\frac{1}{x+n+a} - \frac{1}{n+a}\right)$$
$$+ \Sigma B_n \left(\frac{1}{x+n+b} - \frac{1}{n+b}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \Sigma L_n \left(\frac{1}{x+n+l} - \frac{1}{n+b}\right)$$

n prenant dans ces séries toutes les valeurs entières, à partir de zéro.

Nous considérerons pour seconde application du théorème de M. Mittag-Leffler, la fonction $f(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)\,\Gamma(x+b)}$; en supposant a et b réels pour plus de simplicité. Soit R_n, le résidu correspondant au pôle $x = -n$, on aura:

$$R_n = \frac{(-1)^n}{1.2.\ldots.n} \frac{1}{\Gamma(a-n)\,\Gamma(b-n)},$$

ou sous une autre forme:

$$R_n = \frac{(-1)^n\, G_n(a)\; G_n(b)}{1.2.\ldots.n\;\; \Gamma(a)\;\Gamma(b)}.$$

si l'on fait pour abréger:

$$G_n(x) = (x-1)\,(x-2).\ldots.\,(x-n).$$

Cela posé, je dis qu'il est impossible de déterminer comme précédemment un nombre constant i, tel que la série $\Sigma \frac{R_n}{n^i}$, en prenant ses termes en valeur absolue soit convergente. Désignons en effet par u_n la valeur absolue de $\frac{R_n}{n^i}$, de la relation facile à trouver:

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} = -\frac{(n-a)\,(n-b)}{n},$$

on conclut:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(n-1)^i\,(n-a)(n-b)}{n^{i+1}},$$

et l'on voit que ce rapport augmentant avec n, la série Σu_n est divergente. Nous avons par conséquent l'exemple d'une fonction présentant cette circonstance, que dans l'expression de la partie méromorphe, les degrés des polynômes entiers qu'on retranche des fractions simples, doivent croître indéfiniment. Considérant alors un exposant v, variable avec n, nous représenterons par u_n la valeur absolue de $\frac{R_n}{n^v}$, et il s'agit de déterminer v de manière que la série $\Sigma u_n x^n$, ou si l'on veut encore celle-ci:

$$\Sigma u_n \left(\frac{x}{n}\right)^n$$

soit convergente pour toute valeur de x. Or il suffit pour cela de supposer $v = n$, de sorte que u_n soit la valeur absolue de $\frac{R_n}{n^n}$.

Effectivement nous trouvons alors:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(n-1)^{n-1}\,(n-a)(n-b)}{n^{n+1}},$$
$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(1-\frac{a}{n}\right)\left(1-\frac{b}{n}\right);$$

expression dont la limite pour n infini est $\frac{1}{e}$. On en conclut d'après un théorème bien connu de Cauchy que la limite de $u_n^{\frac{1}{n}}$, est également $\frac{1}{e}$; la quantité $\left[u_n \left(\frac{x}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}$ décroît donc indéfiniment lorsque n augmente, quelque soit la valeur de x, et notre série est comme nous l'avons annoncé convergente dans tout le plan.

De ce que nous venons de dire il résulte qu'en désignant par $G(x)$ une fonction holomorphe on a l'expression suivante :

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x+a)\,\Gamma(x+b)} = G(x) + \frac{R_0}{x} + R_1\left(\frac{1}{x+1} - 1\right)$$
$$+ R_2\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} - \frac{x}{2^2} - \frac{x^2}{2^3}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ R_n\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} - \cdots\cdots - \frac{x^{2n-2}}{n^{2n-1}}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

XVI^ème Leçon.

Les fonctions uniformes dont nous nous sommes occupés jusqu'ici, n'admettaient de discontinuités qu'en des points isolés. Nous allons maintenant aborder l'étude des fonctions qui deviennent discontinues pour tous les points d'une ligne. Déjà nous sommes parvenus à la notion de ce mode de discontinuité, en considérant au début de la théorie des fonctions, l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x}$, qui est égale à $f(x)$, quand x est à l'intérieur du contour S, et qui est nulle quand x est à l'extérieur de ce contour. Le contour d'intégration est donc une ligne de discontinuité pour cette intégrale, c'est ce que Riemann a appelé une coupure. Nous allons voir que la considération élémentaire de la fonction : $\Phi(z) = \int_\alpha^\beta \frac{F(t,z)}{G(t,z)}\,dt$, où $F(t,z)$ et $G(t,z)$ sont holomorphes en t et z, les limites α et β, étant réelles, conduit à cette même notion de coupure de sorte que la conception de Riemann s'offre naturellement au commencement du calcul intégral.

Le cas le plus simple que présente l'expression précédente, s'obtient en prenant :

$$\Phi(z) = \int_\alpha^\beta \frac{dt}{z-a-ib+t},$$

nous le considérerons tout d'abord, à cause de son importance.

Une première remarque c'est que cette intégrale n'ayant un sens que si la quantité sous

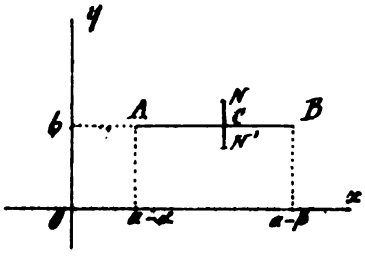
le signe $\int$ ne devient pas infinie, quand t varie de α à β la fonction $\Phi(z)$ n'est point déterminée par sa définition pour les valeurs de z satisfaisant à la condition:

$$t+z = a+ib.$$

Soit donc $z = x+iy$, les solutions de cette équation s'obtiennent en posant:

$$\begin{cases} y = b \\ x = a-t, \end{cases}$$

où t varie de α à β, et sont représentées par un segment de droite AB parallèle à l'axe des abscisses. Il en résulte que pour un point z pris sur ce segment, la fonction $\Phi(z)$ n'a pas d'existence, tandis que pour tout autre point du plan, elle a une valeur unique, parfaitement déterminée. Je dis de plus que AB est une coupure. Prenons sur une perpendiculaire à AB élevée au point C et à des distances égales de C les points N et N'.



Nommons θ la valeur de t qui donne le point C, et soit $CN = CN' = \lambda$. Posons de plus $\zeta = a+ib-\theta$; l'affixe du point N sera ainsi: $\zeta+i\lambda$; et celle du point N', $\zeta-i\lambda$.

Calculons maintenant la différence $\Phi(N)-\Phi(N')$.

On a, en remplaçant ζ par sa valeur:

$$\Phi(N) = \int_\alpha^\beta \frac{dt}{t-\theta+i\lambda}; \qquad \Phi(N') = \int_\alpha^\beta \frac{dt}{t-\theta-i\lambda},$$

d'où:

$$\Phi(N)-\Phi(N') = -2i\int_\alpha^\beta \frac{\lambda\,dt}{(t-\theta)^2+\lambda^2};$$

et par conséquent:

$$\Phi(N)-\Phi(N') = -2i\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta-\theta}{\lambda} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha-\theta}{\lambda}\right).$$

Si θ n'est pas compris entre α et β, cette expression est nulle en faisant $\lambda = 0$. Mais si θ est compris entre α et β, $\Phi(N)-\Phi(N')$ tend vers $-2i\pi$, car on a pour λ infiniment petit et positif:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta-\theta}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

et

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha-\theta}{\lambda} = -\frac{\pi}{2}.$$

Le segment AB est donc une coupure pour la fonction manifestement uniforme $\Phi(z)$. Ceci nous montre que l'intégrale $\int_\alpha^\beta \frac{2i\lambda\,dt}{(t-\theta)^2+\lambda^2}$ n'est pas toujours nulle avec λ. En supposant en effet que θ est compris entre α et β elle est égale à $2i\pi$ pour une valeur infiniment petite de cette quantité. C'est ce qu'on appelle une intégrale singulière. Les éléments d'une pareille intégrale sont nuls, sauf l'élément unique et infini qui correspond à $t=\theta$. Les intégrales singulières ont été souvent employées par Cauchy et Poisson, mais elles n'ont plus un rôle aussi étendu, dans les travaux analytiques de notre époque.

Nous allons maintenant appliquer la notion de coupures à la détermination des intégrales

définies, mais il est nécessaire d'abord de faire quelques remarques.

Soit $f(z)$ une fonction uniforme qui devient infinie pour $z = a + ib$; les points du plan par lesquels la fonction:

$$\Phi(z) = \int_\alpha^\beta D_t f(t+z)\, dt$$

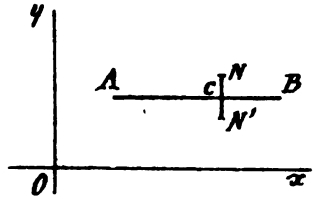
n'est point déterminée par l'intégrale, s'obtiennent en posant

$$t + z = a + ib,$$

d'où:

$$\begin{cases} y = b \\ x = a - t, \end{cases}$$

équations qui représentent, comme nous l'avons déjà dit, un segment de droite AB, parallèle à Ox.



Prenons, comme plus haut, deux points N et N' de part et d'autre de AB, sur une perpendiculaire en C à cette droite, et soit $CN = CN' = \lambda$.

Nous allons faire voir que dans le cas présent la variation de la fonction $\Phi(z)$ aux deux bords de la coupure, c'est-à-dire: $\Phi(N) - \Phi(N')$ est infiniment petite avec λ, tandis que dans le cas traité plus haut cette différence était $-2i\pi$.

Soit θ la valeur de t qui donne le point $a+ib$, que je désignerai par C pour abréger. Nommons ζ la valeur correspondante de z, de sorte que $\theta + \zeta = C$. L'affixe du point N sera $\zeta + i\lambda$; et en posant pour un moment:

$$f(t) = F(t - c),$$

nous aurons:

$$\Phi(N) = F(\beta - \theta + i\lambda) - F(\alpha - \theta + i\lambda).$$

Pour toutes les valeurs de θ différentes de β ou de α les quantités $F(\beta - \theta)$ et $F(\alpha - \theta)$ ne seront pas infinies, et on pourra développer $\Phi(N)$ en série ordonnée suivant les puissances de λ par la formule de Mac-Laurin, le terme indépendant de λ étant $F(\beta-\theta) - F(\alpha-\theta)$. En opérant de même à l'égard de $\Phi(N')$, on voit immédiatement que $\Phi(N) - \Phi(N')$ est infiniment petit avec λ. Ainsi la variation de la fonction $\Phi(z) = \int_\alpha^\beta f'(t+z)\, dt$ aux deux bords de la coupure est infiniment petite.

Envisageons maintenant une fonction rationnelle, ou en général une fonction uniforme quelconque $f(t)$, et soit:

$$\Phi(z) = \int_\alpha^\beta f(t+z)\, dt.$$

A chacune des discontinuités polaires ou essentielles de $f(t)$ correspond une coupure pour $\Phi(z)$; ces coupures sont représentées par des segments de droite parallèles à Ox.

Cherchons la variation de $\Phi(z)$ aux deux bords de la coupure qui correspond à une discontinuité $t = a$ de $f(t)$.

On sait que l'on a:

$$f(t) = \Sigma \left[G_a\left(\frac{1}{t-a}\right) + P_a(t) \right],$$

G_a et P_a désignant une fonction holomorphe, et un polynôme entier.

Or le terme qui rend $\Phi(z)$ discontinue pour $t = a$ provient de $G_a\left(\frac{1}{t-a}\right)$, et nous avons

vu qu'on pouvait écrire :

$$G_a\left(\frac{1}{t-a}\right) = \frac{A}{t-a} + g'_a\left(\frac{1}{t-a}\right),$$

g'_a désignant la dérivée d'une fonction holomorphe et A représentant le résidu de $f(t)$ relatif à $t=a$. Par suite, d'après ce que nous avons établi plus haut, la variation de $\Phi(z)$, c'est-à-dire $\Phi(N) - \Phi(N')$ aux deux bords de la coupure correspondant à la discontinuité considérée de $f(t)$, est égale à $-2i\pi A$, c'est-à-dire au produit de $-2i\pi$ par le résidu de $f(t)$ relatif à $t=a$.

Les résultats auxquels nous venons de parvenir s'appliquent à la détermination d'un grand nombre d'intégrales définies ; nous nous proposons d'en calculer quelques-unes, d'une part par la considération des coupures, et ensuite en employant le théorème de Cauchy qui donne la valeur de l'intégrale d'une fonction uniforme le long d'un contour fermé.

Envisageons en premier lieu la quantité $J = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$, où $f(t)$ désigne une fonction rationnelle de la variable réelle t. On se rappelle les conditions que doit remplir la fonction $f(t)$ pour que cette intégrale ait un sens. La fonction sous le signe $\int$ ne doit pas éprouver de discontinuité entre les limites de l'intégration ; donc les pôles de $f(t)$ doivent être tous imaginaires ; de plus, la circonstance de limites infinies exige, à l'égard de la fonction rationnelle $f(t)$ que le degré du numérateur soit inférieur de deux unités au moins à celui du dénominateur. Du reste, cette condition nécessaire va se présenter d'elle-même comme conséquence des deux méthodes que nous allons exposer.

Employons, en premier lieu, la considération des coupures ; j'établirai tout d'abord que la fonction :

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+z)\,dt$$

est indépendante de z, en montrant que $\Phi'(z)$ est nul. Or on a :

$$\Phi'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t+z)\,dt,$$

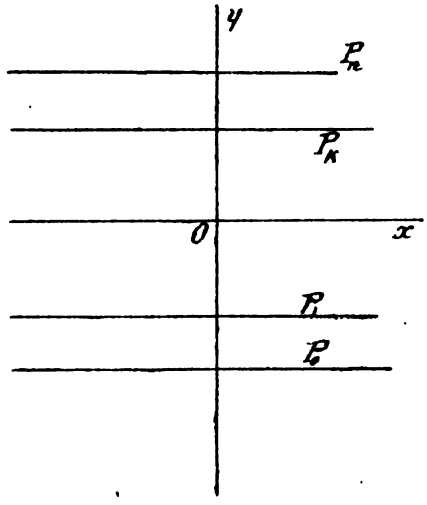
de sorte que $\Phi'(z)$ est égale à la différence des valeurs de $f(t+z)$ pour $t=\infty$ et $t=-\infty$, mais d'après ce que nous avons dit des conditions que doit remplir la fonction $f(t)$, ces deux valeurs sont nulles ; par suite $\Phi'(z)=0$ et $\Phi(z)$ est une constante indépendante de z. Toutefois cette constante qui reste la même entre certaines limites, change de valeur en passant d'un intervalle à un autre, comme on va voir.

Remarquons d'abord que z ayant une valeur imaginaire infinie, la fonction $f(t+z)$ est nulle, de sorte qu'on a alors :

$$\Phi(z) = 0.$$

Construisons actuellement le système des coupures de $\Phi(z)$. Si $a+bi$ est un des pôles de $f(t)$, la coupure correspondante sera donnée par les équations : $y=b$, $x=a-t$, où t varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Ce sera donc une droite indéfinie parallèle à Ox et dont l'ordonnée est égale au coefficient de i.



Cela étant, nous rangerons les pôles de $f(t)$ par ordre de grandeur croissante des coefficients de i, de sorte qu'ils soient ainsi désignés par :

$$a_0 + ib_0\ ,\quad a_1 + ib_1\ ,\quad \ldots\ldots a_n + ib_n\ ,$$

et nous tracerons les parallèles à Ox ayant les valeurs de ces coefficients pour ordonnées. Le système des coupures de $\Phi(z)$ sera donc formé des droites :

$$P_0\ ,\ P_1\ ,\ \ldots P_n\ .$$

Cela posé, lorsque z a une valeur imaginaire très grande dans laquelle le coefficient de i est négatif, $\Phi(z)$, comme nous l'avons vu, est nulle, et par conséquent, restera nulle dans toute la région du plan située au-dessous de la première coupure. En franchissant cette ligne, $\Phi(z)$ éprouve une variation représentée, ainsi que nous l'avons démontré, par $-2i\pi R_0$, R_0 désignant le résidu de $f(t)$ relatif au pôle $a_0 + ib_0$ correspondant à cette coupure. On trouvera de même, si l'on dépasse la seconde ligne :

$$\Phi(z) = -2i\pi\,(R_0 + R_1)\ ,$$

et en continuant ainsi de proche en proche, on voit que la valeur de la fonction dans la région du plan comprise entre les coupures P_K et P_{K+1} sera :

$$-2i\pi\,(R_0 + R_1 + \ldots\ldots R_K)\ ,$$

R_p désignant en général le résidu de $f(t)$ relatif au pôle $a_p + ib_p$.

Enfin, et en dernier lieu, la valeur de $\Phi(z)$ dans la portion du plan située au-dessus de la dernière coupure P_n est $-2i\pi(R_0 + R_1 + \ldots\ldots + R_n)$. Mais d'après ce que nous avons dit plus haut, dans cette même portion du plan, $\Phi(z)$ a pour valeur zéro. Donc la somme des résidus, c'est-à-dire ce que Cauchy appelle le résidu intégral de la fonction, doit être nul. On voit immédiatement que cette condition est équivalente à celle que nous avons énoncée plus haut, savoir : que le degré du numérateur de $f(t)$ doit être inférieur de deux unités au moins à celui du diviseur ; il suffit, pour s'en convaincre, de décomposer $f(t)$ en fractions simples, et de développer chacune de ces fractions suivant les puissances décroissantes de la variable.

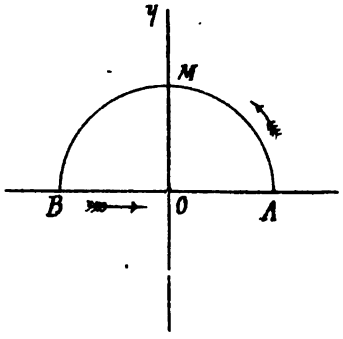
L'intégrale J que nous voulons calculer est égale à $\Phi(0)$. Si donc l'axe Ox est compris entre les coupures P_K et P_{K+1}, on a :

$$J = -2i\pi\,(R_0 + R_1 + \ldots R_K)\ ,$$

ou bien, d'après la condition $R_0 + R_1 + \ldots\ldots R_n = 0$,

$$J = 2i\pi\,(R_{K+1} + R_{K+2} + \ldots\ldots + R_n)\ .$$

L'expression cherchée $J = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est donc égale au produit de $2i\pi$ par la somme des résidus relatifs aux pôles de $f(t)$, qui sont situés au-dessus de l'axe Ox. Nous allons parvenir à ce même résultat, en suivant une autre voie. On sait que l'intégrale d'une fonction uniforme prise le long d'un contour fermé est égale au produit de $2i\pi$ par la somme des résidus relatifs aux pôles



compris à l'intérieur de ce contour. Prenons comme contour d'intégration S un demi-cercle AMB, de rayon R, dont le centre est à l'origine des coordonnées, et de diamètre BA. On aura alors :

$$\int_S f(z)\,dz = \int_{(AMB)} f(z)\,dz + \int_{(BA)} f(z)\,dz ;$$

or en posant $z = Re^{it}$ la première intégrale s'exprime ainsi :

$$\int_{(AMB)} f(z) = \int_0^{\pi} f(Re^{it})\, iRe^{it}\,dt .$$

Quant à la seconde $\int_{(BA)} f(z)\,dz$, c'est l'intégrale rectiligne : $\int_{-R}^{+R} f(t)\,dt$ qui donne la quantité que nous voulons obtenir, en supposant R infini. Désignant donc par Σ la somme des résidus de $f(t)$ relatifs aux pôles situés à l'intérieur du demi-cercle AMB, on aura :

$$\int_0^{\pi} f(Re^{it})\, iRe^{it}\,dt + \int_{-R}^{+R} f(t)\,dt = 2i\pi\Sigma .$$

Faisons maintenant croître R au-delà de toute limite ; d'après la forme de la fonction $f(t)$, le développement de $f(Re^{it})$ suivant les puissances descendantes de R commencera par un terme en $\frac{1}{R^2}$; par suite dans l'intégrale $\int^{\pi} f(Re^{it})\, iRe^{it}\,dt$, la fonction sous le signe $\int$ développée suivant les puissances descendantes de R, commence par un terme en $\frac{1}{R}$; elle est nulle avec $\frac{1}{R}$; de sorte que cette intégrale tend vers zéro quand R augmente au-delà de toute limite. En même temps : $\int_{-R}^{+R} f(t)\,dt$ devient l'intégrale cherchée J et Σ la somme des résidus de $f(t)$ relatifs aux pôles situés au-dessus de Ox. On retrouve donc la proposition précédente :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2i\pi\Sigma .$$

Nous appliquerons ce théorème à un exemple particulier en supposant $f(t) = \frac{t^{2m} - t^{2m'}}{1 - t^{2n}}$ où m, m', n sont des nombres entiers positifs, m et m' étant $< n$.

Les valeurs de t qui annulent le dénominateur $1 - t^{2n}$ sont données par la formule :

$$t = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n} ;$$

où k reçoit les valeurs $0, 1, 2, \ldots\ldots, 2n-1$.

Pour $k = 0$, on a $t = 1$; mais ce n'est pas un pôle ; car alors $f(t)$ qui prend la forme $\frac{0}{0}$, a une limite finie, et il en est de même de $t = -1$, qui correspond à $k = n$.

Cela posé on voit immédiatement que les pôles situés au-dessus de l'axe Ox s'obtiennent en donnant à k les valeurs $1, 2, 3, \ldots\ldots n-2, n-1$; ces pôles sont d'ailleurs du premier ordre de multiplicité ; par suite le résidu relatif à l'un d'eux sera donné d'après une règle connue, par la formule $R = \frac{t^{2m} - t^{2m'}}{-2n\,t^{2n-1}}$ ou simplement, puisqu'on a : $t^{2n} = 1$, $R = \frac{t^{2m+1} - t^{2m'+1}}{2n}$.

Soit maintenant :

$$u = \cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2m+1)\pi}{n},$$

$$v = \cos\frac{(2m'+1)\pi}{n'} + i\sin\frac{(2m'+1)\pi}{n},$$

la somme Σ des résidus relatifs aux pôles situés au-dessus de Ox est donnée par la formule :

$$\Sigma = -\frac{1}{2n}\left[(u + u^2 + \ldots + u^{n-1}) - (v + v^2 + \ldots + v^{n-1})\right]$$

$$= -\frac{1}{2n}\left[\left(\frac{u^n - 1}{u - 1} - 1\right) - \left(\frac{v^n - 1}{v - 1} - 1\right)\right].$$

Remplaçons u^n et v^n par leur valeur -1; il vient :

$$\Sigma = \frac{1}{2n}\left(\frac{u+1}{u-1} - \frac{v+1}{v-1}\right).$$

Or on a : $\quad \frac{u+1}{u-1} = \frac{1}{i}\operatorname{cotg}\frac{(2m+1)}{2n}\pi, \qquad \frac{v+1}{v-1} = \frac{1}{i}\operatorname{cotg}\frac{(2m'+1)}{2n}\pi;$

par conséquent : $\quad \Sigma = \frac{1}{2ni}\left(\operatorname{cotg}\frac{2m+1}{2n}\pi - \operatorname{cotg}\frac{2m'+1}{2n}\pi\right),$

et nous obtenons : $\quad J = \frac{\pi}{n}\left(\operatorname{cotg}\frac{2m+1}{2n}\pi - \operatorname{cotg}\frac{2m'+1}{2n}\pi\right).$

On peut remarquer que la fonction $f(t)$ est paire ; de sorte que nous pouvons écrire, en prenant zéro et l'infini pour limites et divisant par 2 :

$$\int_0^\infty \frac{t^{2m}-t^{2m'}}{1-t^{2n}}\,dt = \frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{cotg}\frac{2m+1}{2n}\pi - \operatorname{cotg}\frac{2m'+1}{2n}\pi\right).$$

Un cas particulier remarquable de cette intégrale s'obtient en mettant $2n$ à la place de n, et posant ensuite $m' = m+n$. La formule précédente devient ainsi :

$$\int_0^\infty \frac{t^{2m}(1-t^{2n})}{1-t^{4n}}\,dt = \frac{\pi}{4n}\left[\operatorname{cotg}\frac{2m+1}{4n}\pi - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2m+1}{4n}\pi\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4n}\left(\operatorname{cotg}\frac{2m+1}{4n}\pi + \operatorname{tg}\frac{2m+1}{4n}\pi\right);$$

en simplifiant, on obtient le résultat suivant qui est dû à Euler :

$$\int_0^\infty \frac{t^{2m}}{1+t^{2n}}\,dt = \frac{\pi}{2n\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

Une autre conséquence importante est encore à tirer de l'intégrale :

$$\int_0^\infty \frac{t^{2m}-t^{2m'}}{1-t^{2n}}\,dt.$$

Soit à cet effet : $\quad x = t^{2n},$

on déduit de là : $\quad dx = 2nt^{2n-1}\,dt,$

et par suite : $\quad t\,dx = 2n x\,dt.$

L'intégrale devient donc :

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{n}} - x^{\frac{m'}{n}}}{1-x}\,\frac{t\,dx}{2nx} = \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{n}+\frac{1}{2n}-1} - x^{\frac{m'}{n}+\frac{1}{2n}-1}}{1-x}\,dx.$$

Faisons croître n indéfiniment et supposons qu'en même temps $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n}$ tendent vers des limites a et b, qui sont nécessairement positives et < 1. La formule dont nous sommes partis nous donne alors le résultat d'une grande importance :

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x}\,dx = \pi\left(\operatorname{cotg} a\pi - \operatorname{cotg} b\pi\right).$$

Voici maintenant une démonstration directe de cette formule, en employant la méthode des coupures.

Au lieu d'envisager sous le signe $\int$ la fonction $\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}$, où a et b sont des quantités quelconques, et qui par conséquent n'est pas uniforme au point de vue analytique, nous allons raisonner sur une transformée de l'intégrale proposée J; nous ferons $x=e^t$ ce qui donne:

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{at}-e^{bt}}{1-e^t}\,dt.$$

Cela étant, et en suivant la même voie que pour la détermination de l'intégrale des fonctions rationnelles nous considérerons la fonction:

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{a(t+z)}-e^{b(t+z)}}{1-e^{(t+z)}}\,dt.$$

On voit immédiatement que le système des coupures est donné par l'équation: $y=2k\pi$, où k reçoit toutes les valeurs entières, positives ou négatives, sauf $k=0$. Cela posé, remarquons qu'alors même que la fonction $f(t)$ n'est plus rationnelle, mais transcendante, l'expression $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t+x)\,dt$ reste encore constante par rapport à z dans l'espace limité par deux coupures consécutives. J'envisagerai en particulier les droites $y=0$, $y=2\pi$, dont l'une est l'axe des abscisses; la valeur de la constante s'obtiendra dans cet intervalle comme il suit. Soient R_1 et R_2 les résidus de la fonction $f(t)=\frac{e^{at}-e^{bt}}{1-e^t}$ pour $t=2i\pi$ et $t=4i\pi$; nous aurons en franchissant successivement les coupures $y=2\pi$, $y=4\pi$:

$$\Phi(z+2i\pi)=\Phi(z)-2i\pi R_1$$
$$\Phi(z+4i\pi)=\Phi(z)-2i\pi(R_1+R_2).$$

Or, on trouve en faisant pour abréger:

$$\alpha=e^{2ai\pi},\qquad \beta=e^{2bi\pi},$$

les valeurs suivantes des résidus, à savoir:

$$R_1=\beta-\alpha,\qquad R_2=\beta^2-\alpha^2;$$

on obtient aussi, comme $f(t)$ contient linéairement les deux exponentielles e^{at} et e^{bt}, la relation:

$$f(t+4i\pi)-(\alpha+\beta)f(t+2i\pi)+\alpha\beta f(t)=0.$$

Nous en déduisons la suivante, à savoir:

$$\Phi(z+4i\pi)-(\alpha+\beta)\Phi(z+2i\pi)+\alpha\beta\Phi(z)=0,$$

et il suffit d'y remplacer $\Phi(z+4i\pi)$ et $\Phi(z+2i\pi)$, par les expressions données plus haut, pour en tirer immédiatement:

$$\Phi(z)=\frac{2i\pi[R_1+R_2-(\alpha+\beta)R_1]}{(1-\alpha)(1-\beta)}=i\pi\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right).$$

Introduisons enfin au lieu de α et β leurs valeurs, et supposons en particulier $z=0$, on aura l'intégrale cherchée:

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{at}-e^{bt}}{1-e^t}\,dt=\pi(\operatorname{cotg} a\pi-\operatorname{cotg} b\pi).$$

Ce résultat a beaucoup de conséquences que nous ne pouvons qu'indiquer en quelques mots.

Soit d'abord $b=1-a$, ce qui donne $\operatorname{cotg} b\pi=-\operatorname{cotg} a\pi$ et revenons à la variable $x=e^t$; nous aurons:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}-x^{-a}}{1-x}\,dx=2\pi\operatorname{cotg} a\pi,$$

pris au moyen d'une transformation facile :

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\, dx = \pi \operatorname{cotg} a\pi .$$

Cette expression de $\operatorname{cotg} a\pi$ par une intégrale définie peut être prise pour point de départ d'une étude des fonctions circulaires, qui conduirait aisément aux résultats que nous avons obtenus par une autre voie, à savoir l'expression par une somme infinie de fractions simples de $\operatorname{cotg} a\pi$, et la formule d'Euler qui donne $\sin a\pi$ sous forme d'un produit d'un nombre infini de facteurs. Qu'on mette en effet dans l'intégrale définie au lieu de $\frac{1}{1-x}$ la quantité : $1 + x + \ldots\ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$; on en déduit facilement cette relation :

$$\pi \operatorname{cotg} a\pi = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{1-a}\right) + \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{2-a}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{n-a}\right) + \int_0^1 \frac{x^{a-1+n} - x^{n-a}}{1-x}\, da,$$

et il est aisé de voir que pour n suffisamment grand, le terme représentant le reste de la série devient quel que soit a plus petit que toute quantité donnée. Sur ce sujet qui touche aussi à la théorie de la fonction $\Gamma(a)$, je renverrai à un article intitulé « Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\, dx$ » qui a paru dans les Atti delle reale Accademia della Scienze di Torino, (Novembre 1878).

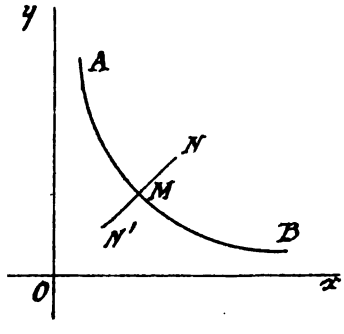
XVII^ème Leçon.

Nous allons maintenant, en nous plaçant à un point de vue plus général, considérer la fonction :

$$\Phi(z) = \int_\alpha^\beta \frac{F(t,z)}{G(t,z)}\, dt,$$

où l'intégrale est toujours prise entre des limites réelles, les quantités $F(t,z)$ et $G(t,z)$ étant holomorphes et

Comme précédemment, nous remarquons que cette intégrale a une valeur unique et finie pour tous les points du plan, à l'exception du lieu qu'on détermine par la condition $G(t,z) = 0$. Cette équation fait correspondre à la série des valeurs réelles de t croissant de α à β, un nombre tantôt fini, tantôt infini de portions de courbe, ou de courbes entières suivant les cas, indiquant ainsi les points du plan où l'intégrale ne donne plus la valeur de la fonction. Nous nous proposons d'établir que ces courbes ont la propriété caractéristique des coupures.



Soit AMB l'une d'elles, rapportée aux axes rectangulaires Ox, Oy et M un de ses points, par lequel on a $t = \theta$, $z = \zeta$, et par conséquent $G(\theta, \zeta) = 0$. Je vais calculer la différence des valeurs de $\Phi(z)$ aux points N et N', pris sur la normale en M à des distances infiniment petites MN, MN' égales entre elles, et faire voir que cette différence est une quantité finie.

Formons d'abord l'équation de la normale en partant de la relation

comme :

$$(X-x)\,dx + (Y-y)\,dy = 0,$$

où X et Y désignent les coordonnées courantes, et x et y celles de la courbe, que l'on suppose fonctions de t. On peut la remplacer par les deux suivantes :

$$X - x = \lambda \frac{dy}{dt},$$
$$Y - y = -\lambda \frac{dx}{dt},$$

λ étant une indéterminée réelle ; on en tire :

$$X - x + i(Y-y) = \lambda\left(\frac{dy}{dt} - i\lambda\frac{dx}{dt}\right) = -i\lambda\frac{d(x+iy)}{dt},$$

et par conséquent :

$$X + iY = z - i\lambda\frac{dz}{dt}.$$

Maintenant l'équation de la courbe étant donnée sous la forme $G(t,z)=0$, nous en déduisons :

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{G'_t(t,z)}{G'_z(t,z)}.$$

En excluant donc les cas où l'on aurait pour certaines valeurs particulières de t et de z, $G'_t(t,z)=0$ ou $G'_z(t,z)=0$, l'affixe d'un point quelconque de la droite sera :

$$Z = z + i\lambda\frac{G'_t(t,z)}{G'_z(t,z)}.$$

Faisons ensuite, afin de séparer les quantités réelles et imaginaires :

$$\frac{G'_t(t,z)}{G'_z(t,z)} = p + iq,$$

et nous aurons pour la normale les deux équations :

$$X = x - \lambda q,$$
$$Y = y + \lambda p,$$

qui donnent lieu à la remarque suivante.

Supposons d'abord p différent de zéro ; nous nommerons direction positive de la normale la partie de cette droite qui au-delà du point de rencontre avec la courbe s'élève indéfiniment au-dessus de l'axe des abscisses, et direction négative, l'autre partie.

On voit que p étant positif, la direction positive s'obtient si l'on fait croître λ de zéro à l'infini, l'autre direction étant donnée par les valeurs négatives de l'indéterminée, tandis que ce sera l'inverse dans l'hypothèse de p négatif. Faisons en second lieu l'hypothèse de $p=0$, de sorte que la normale soit parallèle à l'axe des abscisses. La direction positive sera alors celle de la partie positive de cet axe et s'obtiendra en donnant à λ des valeurs de signe contraire à celui de q. On peut donc toujours représenter la partie positive de la normale par les équations :

$$X = x - \varepsilon\lambda q,$$
$$Y = y + \varepsilon\lambda p,$$

où λ est positif, et ε qui est égal à l'unité en valeur absolue, ayant le signe de p lorsque p n'est point

mal, et donne le cas de $p=0$, le signe de $-q$. On aura la partie négative de la normale par les mêmes équations, en y supposant λ négatif.

Ceci établi, posons :

$$G'_t(t,z) = P(t,z),$$
$$G'_x(t,z) = Q(t,z).$$

Au point M, on a $t=\theta$, $z=\zeta$. L'affixe du point N situé sur la direction positive de la normale, sera donnée pour une valeur infiniment petite et positive de λ par la formule :

$$z = \zeta + i\varepsilon\lambda \frac{P(\theta,\zeta)}{Q(\theta,\zeta)}.$$

Ceci posé, faisons encore :

$$F'_z(t,z) = R(t,z);$$

en négligeant les infiniment petits du second ordre, on aura :

$$F(t,z) = F(t,\zeta) + i\varepsilon\lambda \frac{P(\theta,\zeta)R(t,\zeta)}{Q(\theta,\zeta)}$$

et

$$G(t,z) = G(t,\zeta) + i\varepsilon\lambda \frac{P(\theta,\zeta)Q(t,\zeta)}{Q(\theta,\zeta)}.$$

Enfin mettons pour abréger P et Q au lieu de $P(\theta,\zeta)$ et $Q(\theta,\zeta)$; ces expressions donneront :

$$\Phi(N) = \int_\alpha^\beta \frac{QF(t,\zeta) + i\varepsilon\lambda PR(t,\zeta)}{QG(t,\zeta) + i\varepsilon\lambda PQ(t,\zeta)}\,dt.$$

Passant ensuite du point N à son symétrique N', il viendra par le changement de λ en $-\lambda$:

$$\Phi(N') = \int_\alpha^\beta \frac{QF(t,\zeta) - i\varepsilon\lambda PR(t,\zeta)}{QG(t,\zeta) - i\varepsilon\lambda PQ(t,\zeta)}\,dt,$$

et après une réduction facile :

$$\Phi(N) - \Phi(N') = -\int_\alpha^\beta \frac{2i\varepsilon\lambda PQ\,[F(t,\zeta)Q(t,\zeta) - G(t,\zeta)R(t,\zeta)]}{Q^2G^2(t,\zeta) + \lambda^2P^2Q^2(t,\zeta)}\,dt.$$

Telle est la quantité dont nous avons maintenant à déterminer la valeur. C'est, comme on le voit, une intégrale singulière, puisque λ doit être supposé infiniment petit, et nous avons à considérer uniquement les éléments infinis donnés par les valeurs de la variable qui annulent $G(t,\zeta)$. Or une telle valeur est $t=\theta$; j'ajoute qu'entre les limites $t=\alpha$, $t=\beta$ l'équation $G(t,\zeta)=0$ ne peut avoir aucune autre racine $t=\theta$. Cette circonstance ne s'offrira en effet qu'autant que $z=\zeta$ sera un point double, et alors devront avoir lieu, comme il est très facile de le reconnaître, les conditions : $G(t,z)=0$, $G'_t(t,z)=0$, $G'_z(t,z)=0$, contrairement aux restrictions qui ont été faites pour obtenir l'équation de la normale. Il suit de là que nous pouvons poser, en négligeant le carré de $(t-\theta)$:

$$G(t,\zeta) = (t-\theta)P;$$

puis remplacer immédiatement la variable t par θ; on trouve ainsi, en simplifiant, l'expression :

$$\Phi(N) - \Phi(N') = -\frac{2i\varepsilon F(\theta,\zeta)}{P(\theta,\zeta)} \int_\alpha^\beta \frac{\lambda\,dt}{(t-\theta)^2 + \lambda^2}$$

Or, λ étant infiniment petit, on a, comme nous l'avons déjà vu:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\lambda dt}{(t-\theta)^2+\lambda^2} = \pi ;$$

donc finalement:

$$\Phi(N) - \Phi(N') = \frac{2i\pi e F(\theta,\zeta)}{P(\theta,\zeta)}.$$

Ce résultat met en évidence pour les courbes que nous considérons le caractère analytique de coupures à l'égard de la fonction $\Phi(z)$.

La considération des intégrales définies nous a ainsi conduits par une voie entièrement élémentaire à la conception de fonctions ayant des lignes de discontinuités. M. Weierstrass a montré (Comptes-Rendus de l'Académie de Berlin, 1880) qu'on pouvait arriver à cette même notion sans considération d'intégrales; il a donné le premier l'exemple de suites infinies formées de quantités rationnelles et qui représentent des fonctions admettant de véritables coupures.

Ces résultats, dus au grand géomètre, ont été obtenus d'une manière plus élémentaire et plus facile, par M. Tannery, au moyen de la suite:

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} + \frac{2x^2}{x^4-1} + \frac{2x^4}{x^8-1} + \frac{2x^8}{x^{16}-1} + \cdots\cdots$$

dont la somme se trouve comme il suit. Écrivons les identités:

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} + \frac{2x^2}{x^4-1} = \frac{1+x^4}{1-x^4},$$

$$\frac{1+x^4}{1-x^4} + \frac{2x^4}{x^8-1} = \frac{1+x^8}{1-x^8},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1+x^{2^n}}{1-x^{2^n}} + \frac{2x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1} = \frac{1+x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}};$$

en ajoutant membre à membre, on voit que la somme des $n+1$ premiers termes est:

$$\frac{1+x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

Si donc on fait croître n au-delà de toute limite, la somme de la série est 1 en supposant le module de $x < 1$, tandis que cette somme est -1 si le module de x est > 1. La fonction représentée par cette série admet donc le cercle de rayon 1, dont le centre est à l'origine, comme coupure.

Voici dans le même ordre d'idées, des résultats beaucoup plus généraux et d'un grand intérêt qui ont été tout récemment obtenus par M. Appell.

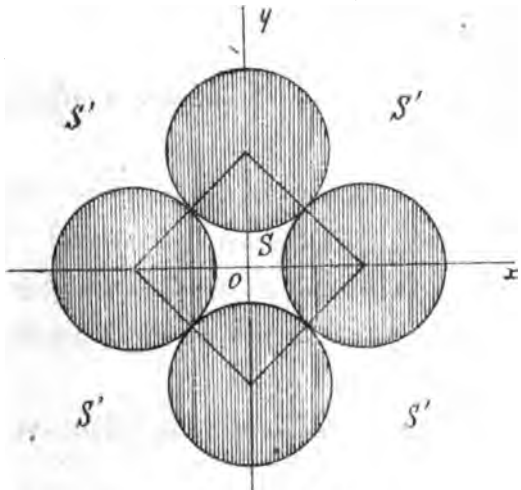
I. Étant données une aire S à contour simple limitée par des arcs de cercle tournant tous leur convexité vers l'intérieur de l'aire et une fonction $f(x)$ holomorphe en tous les points de cette aire, il existe une série de fractions rationnelles possédant les propriétés suivantes:

1° Cette série est convergente en tous les points de l'aire S et en tous les points de l'aire indéfinie S' située à l'extérieur de tous les cercles dont font partie les arcs limites ;

2° La somme de cette série est égale à $f(x)$ dans l'aire S et à zéro dans l'aire S'.

II. Considérons par exemple quatre cercles égaux ayant pour rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et pour centres respectifs les quatre points ayant pour affixes :

$$1\ ,\ i\ ,\ -1\ ,\ -i\ .$$



L'espace situé en dehors de ces cercles, se compose de deux parties séparées, à savoir :

1° Une aire limitée S comprenant l'origine 0 ;

2° Une aire indéfinie S'.

La série de fractions rationnelles :

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n2^{\frac{n}{2}}}\left[\frac{1}{(1-x)^n}+\frac{1}{(1+ix)^n}+\frac{1}{(1+x)^n}+\frac{1}{(1-ix)^n}\right]$$

est convergente dans les aires S et S' ; dans l'aire S la somme de cette série est égale à l'unité et dans l'aire S' cette somme est égale à zéro.

Sans m'arrêter davantage sur ce sujet, je renverrai au beau travail de M. Appell, intitulé: Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle. (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, T. XCIV, p. 1238 et Mathematischen Annalen, XXI Baude p. 118)

Enfin on peut agrandir encore le champ des discontinuités, et concevoir des fonctions qui soient définies pour tous les points du plan ; sauf ceux compris à l'intérieur d'un certain contour.

Voici à ce sujet, un résultat extrêmement remarquable, dû à M. Poincaré. Soient x, y, z trois quantités quelconques dont le module soit < 1. On aura alors :

$$\frac{1}{1-x} = \Sigma x^m\ ,$$
$$\frac{1}{1-y} = \Sigma y^n\ ,$$
$$\frac{1}{1-z} = \Sigma z^p\ ,$$

et par suite :

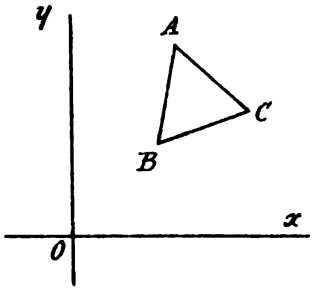
$$\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)} = \Sigma x^m y^n z^p\ .$$

le second membre, où les exposants m, n, p prennent toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à $+\infty$, représentant une série convergente.

Cela posé, envisageons l'expression :

$$\Sigma \frac{x^m y^n z^p}{\xi - \frac{ma+nb+pc}{m+n+p}}\ ,$$

où a, b, c sont des quantités imaginaires quelconques. Soient A, B, C les points dont les affixes sont a, b, c ; supposons appliquées en ces points trois forces parallèles et de même sens, proportionnelles aux nombres m, n, p ; la quantité $\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}$ sera l'affixe du centre de ces forces, et



l'on peut admettre par suite que m, n, p soient pris de telle sorte que : $\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}$ représente avec une approximation aussi grande qu'on le veut un point quelconque de l'intérieur du triangle ABC. Si donc ξ est l'affixe d'un point situé à l'intérieur de ABC, la série considérée est divergente, puisqu'elle renferme un nombre infini de termes supérieurs à toute limite, et ne peut définir une fonction. Elle a au contraire une valeur parfaitement déterminée lorsque ξ est l'affixe d'un point à l'extérieur de ABC ; de sorte que l'on peut dire que cette série définit une fonction présentant le triangle ABC comme espace lacunaire.

Nous avons choisi l'exemple le plus simple ; on formerait de la même manière des fonctions admettant un polygone donné comme espace lacunaire ; nous renverrons au beau travail que M. Poincaré a publié dans les *Acta Societatis Fennicae*, sous le titre : *Sur les fonctions à espaces lacunaires* (T. XIII, 1881), et qui contient sur ce sujet des vues nouvelles et du plus grand intérêt.

Ces considérations nous ont conduit au terme de l'étude succincte que nous avons voulu faire de cette partie de la théorie générale des fonctions qui concerne les fonctions uniformes. Avant d'aborder, et en quelques points seulement, les recherches relatives aux fonctions d'une autre nature, nous nous arrêterons à une question importante, où nous aurons à exposer l'une des plus belles découvertes de Cauchy, nous voulons parler de la résolution par des intégrales définies des équations $G(z)=0$, dont le premier membre est une fonction holomorphe de l'inconnue.

La détermination des racines se trouvera ainsi ramenée aux calculs par approximation de ces intégrales, calculs pour lesquels on a des méthodes générales qui font l'objet de théories importantes. Mais les expressions auxquelles nous allons parvenir et qui ont été données pour la première fois par le grand géomètre, ne fournissent point, par exemple, dans le cas des équations algébriques du troisième ou du quatrième degré, des valeurs explicites des racines en fonction des coefficients.

Ces formules donnent seulement le moyen d'obtenir les valeurs numériques des quantités qu'elles représentent, et à cet égard, elles remplissent leur objet. Étudier la nature des irrationnelles qui satisfont à des équations algébriques à coefficients entiers, distinguer ces quantités en types divers plus ou moins complexes, ou bien rechercher analytiquement dans quelles circonstances des équations admettent pour solutions des fonctions d'une nature donnée, sont aussi des questions qui se rattachent au même sujet, mais à d'autres points de vue. Ces recherches difficiles et importantes sont du domaine de l'algèbre et de la théorie des nombres ; elles ont uniquement pour objet les équations algébriques, tandis que nous allons considérer en général l'équation $G(z)=0$, le premier membre étant comme nous l'avons dit une fonction holomorphe quelconque. Des propositions précédemment établies à l'égard de ces fonctions, nous tirons en premier lieu la remarque suivante.

Soit a une racine d'ordre m de multiplicité ; on aura :

$$G(z) = (z-a)^m G_1(z),$$

$G_1(z)$ ne s'annulant plus pour $z=a$. De cette égalité on tire :

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{G_1'(z)}{G_1(z)} ;$$

par conséquent le résidu de la fonction $\frac{G'(z)}{G(z)}$ correspondant au pôle $z=a$, est égal au nombre entier et positif m, qui indique l'ordre de multiplicité de la racine a. Si donc on envisage l'intégrale $\int_S \frac{G'(z)}{G(z)}dz$, le théorème général de Cauchy nous montre qu'elle aura pour valeur $-2i\pi\mu$, μ désignant le nombre des racines de l'équation $G(z)=0$ comprises à l'intérieur du contour S, en tenant compte de l'ordre de multiplicité de ces racines.

On voit donc dès maintenant qu'il sera toujours possible de calculer le nombre des racines d'une équation comprises à l'intérieur d'un contour donné quelconque, puisque la solution de cette question se trouve ramenée à la détermination numérique d'une intégrale définie qu'il suffit même d'obtenir à moins d'une unité, pour en avoir la valeur exacte.

A cette première proposition nous allons ajouter la suivante:

Soit $F(z)$ une fonction finie, continue et uniforme à l'intérieur du contour S, et envisageons l'intégrale

$$\int_{(S)} \frac{F(z)\,G'(z)}{G(z)}\,dz .$$

D'après le théorème de Cauchy, cette intégrale a pour valeur le produit de $2i\pi$ par la somme des résidus de la fonction $\frac{F(z)G'(z)}{G(z)}$ relatifs aux racines de $G(z)$ comprises à l'intérieur du contour S. Si a est une telle racine, le degré de multiplicité égal à m, le résidu correspondant sera évidemment $m\,F(a)$. Par suite, l'intégrale précédente est égale au produit de $2i\pi$ par la somme des valeurs de $F(z)$ qui correspondent aux racines de $G(z)=0$, comprises à l'intérieur du contour S, en tenant compte de l'ordre de multiplicité de ces racines.

Il résulte de là qu'ayant déterminé un contour S à l'intérieur duquel il n'y ait qu'une seule racine $z=a$, une fonction quelconque $F(a)$ de cette racine est donnée par la formule:

$$F(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_{(S)} \frac{F(z)\,G'(z)}{G(z)}\,dz ,$$

et peut être obtenue par conséquent avec autant d'approximation que l'on veut.

Nous allons donner un exemple de ce calcul approximatif en considérant l'intégrale qui exprime le nombre μ des racines comprises à l'intérieur d'un cercle de rayon R, ayant pour centre l'origine, et supposant que $G(z)$ soit un polynôme entier. Nous poserons à cet effet $z=Re^{it}$, de sorte qu'en faisant:

$$J=\int_{(S)} \frac{G'(z)}{G(z)}\,dz$$

on aura:

$$J=\int_0^{2\pi} \frac{G'(z)}{G(z)}\,iRe^{it}dt = i\int_0^{2\pi} \frac{z\,G'(z).dt}{G(z)} ,$$

et par suite:

$$\mu=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\,G'(z)}{G(z)}\,dt .$$

Pour calculer cette intégrale, faisons usage de la formule approchée :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{2\pi}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{2\pi}{n}\right)+f\left(\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots\ldots+f\left(\frac{2(n-1)}{n}\right)\right],$$

qui est d'autant plus exacte que l'entier n est plus grand.

Soit θ une racine primitive de l'équation $\theta^n-1=0$, $\theta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, par exemple ; cette formule donnera alors avec d'autant plus d'approximation que n sera plus grand :

$$\mu = \frac{1}{n}\,\Sigma\,\frac{z\,G'(z)}{G(z)},$$

les divers termes de la somme se rapportant aux valeurs :

$$z = R,\ R\theta,\ R\theta^2,\ R\theta^3,\ \ldots\ldots R\theta^{n-1}.$$

Allons plus loin, et employons la formule :

$$\frac{n}{x^n-1} = \Sigma\,\frac{\theta}{x-\theta},$$

où l'on suppose que θ représente successivement les diverses racines de l'équation $\theta^n-1=0$. Cela posé, soient $a, b, c, \ldots\ldots k, l$ les racines de l'équation $G(z)=0$, et faisons $x=\frac{a}{R}$; on aura :

$$\frac{n}{1-\left(\frac{a}{R}\right)^n} = \Sigma\,\frac{\theta}{\theta-\frac{a}{R}} = \Sigma\,\frac{R\theta}{R\theta-a},$$

la sommation étant effectuée par rapport aux diverses valeurs de θ.

D'autre part, on a aussi :

$$\frac{z\,G'(z)}{G(z)} = \Sigma\,\frac{z}{z-a} ;$$

donc, en tenant compte de la relation établie plus haut, qui donne le nombre μ, il vient :

$$\mu = \Sigma\,\frac{1}{1-\left(\frac{a}{R}\right)^n}.$$

Cette expression met immédiatement en évidence la propriété de représenter approximativement le nombre des racines $a, b, \ldots\ldots$ dont le module est $< R$. En effet, pour n très grand, les termes $\frac{1}{1-\left(\frac{a}{R}\right)^n}$ sont sensiblement 0 ou 1, suivant qu'on aura :

$$\text{mod } a > R, \text{ ou bien : mod } a < R.$$

Ajoutons qu'en formant l'équation $\Pi(z)=0$, aux puissances n^{es} des racines de l'équation $G(z)=0$, ce qui donnera : $\dfrac{z\Pi'(z)}{\Pi(z)} = \Sigma\,\dfrac{z}{z-a^n} = \Sigma\,\dfrac{1}{1-\frac{a^n}{z}}$,

on en conclut, en faisant $z=R^n$, la relation :

$$\frac{z\Pi'(z)}{\Pi(z)} = \Sigma\,\frac{1}{1-\left(\frac{a}{R}\right)^n} ;$$

nous avons donc : $\mu = \dfrac{z\Pi'(z)}{\Pi(z)}$, pour $z=R^n$.

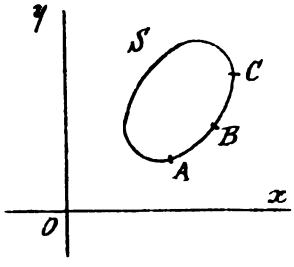
On peut ainsi calculer μ par cette formule avec telle approximation qu'on le veut, en prenant n suffisamment grand.

XVIII^ème Leçon.

Soit $G(z)=0$, une équation dont le premier membre est une fonction holomorphe de z; si μ est le nombre des racines de cette équation qui sont comprises à l'intérieur d'un contour fermé quelconque S, nous avons vu qu'on a la formule:

$$\mu = \frac{1}{2i\pi}\int_{(S)} \frac{G'(z)}{G(z)}\,dz.$$

Pour calculer une semblable intégrale, nous savons qu'il faut poser $z=\varphi(t)+i\psi(t)$, φ et ψ étant deux fonctions réelles de la variable réelle t, telles que les équations: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ représentent le contour S. Mais il n'est pas nécessaire que ce contour soit donné dans toute son étendue par les mêmes fonctions φ et ψ, et l'on peut concevoir qu'il soit composé de plusieurs chemins partiels, tels que pour chacun d'eux séparément les fonctions φ et ψ restent les mêmes. Dans ce cas, si AB, BC..... sont ces divers chemins, on calculera l'intégrale proposée en faisant usage de la formule suivante:



$$\int_{(S)} \frac{G'(z)}{G(z)}\,dz = \int_{(AB)} \frac{G'(z)}{G(z)}\,dz + \int_{(Bc)} \frac{G'(z)}{G(z)}\,dz + \ldots\ldots$$

et dans chacune des intégrales du second membre, quand on posera $z=\varphi(t)+i\psi(t)$, les fonctions φ et ψ resteront les mêmes.

Introduisons donc cette variable t et supposons qu'on décrive le contour S en entier et une seule fois dans le sens direct en partant du point A avec la valeur initiale $t=a$, pour revenir à ce même point avec la valeur $t=b$.

La fonction $G(z)$ devient ainsi $P+iQ$, ou bien en mettant le module et l'argument en évidence: $Re^{i\lambda}$.

Nous obtenons alors, en remarquant que

$$\frac{G'(z)}{G(z)}\,dz = d\left[\log\left(G(z)\right)\right];$$

cette nouvelle expression:

$$\mu = \frac{1}{2i\pi}\int_{(S)} d(\log R) + \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} d\lambda\,;$$

Or μ étant réel, le premier terme doit disparaître; on le vérifie aisément, en remarquant que $\log R$ est pris dans le sens arithmétique; par suite, les valeurs de $\log R$ pour $t=a$ et $t=b$, sont les mêmes, et $\int_{(S)} d(\log R)=0$. Il vient donc simplement:

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} d\lambda\,;$$

on en conclut que λ_0 et λ désignant les valeurs initiale et finale de l'argument de $G(z)$, on peut écrire:

$$\lambda_1 - \lambda_0 = 2\mu\pi.$$

Nous retrouvons là par la voie du Calcul Intégral un théorème que nous avons déjà démontré par des considérations élémentaires, dans le cas où $G(z)$ est un polynôme, savoir: La variation de l'argument d'une fonction holomorphe en suivant le contour d'une aire parcourue dans le sens positif, est égale au produit de 2π par le nombre des racines comprises dans cette aire.

Cauchy ne s'est pas contenté de ce résultat, et est arrivé à un théorème qui est l'une de ses plus belles découvertes et qui suffirait parmi tant d'autres à immortaliser son nom.

Nous allons montrer en suivant la méthode même du grand géomètre, qu'on peut arriver à déterminer le nombre μ à l'aide d'opérations en tout semblables à celles qu'exige l'application du théorème de Sturm, quand les coordonnées du contour sont des fonctions rationnelles de la variable t.

Reprenons à cet effet, l'expression de $G(z)$ sous la forme $P+iQ$; son argument λ est défini par la relation: $\operatorname{tg}\lambda = \frac{Q}{P}$ où P et Q sont des fonctions de t complètement déterminées lorsqu'on donne les quantités $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ qui définissent le contour S ou ses diverses parties, et que nous supposons uniformes dans chacun des intervalles correspondants.

Soit donc: $\frac{Q}{P} = f(t)$, nous pouvons écrire:

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)};$$

cela étant, c'est l'étude de cette intégrale définie qui va nous donner le théorème de Cauchy.

Remarquons d'abord que l'intégrale indéfinie $\int \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)}$ est explicitement connue au moyen de la formule $\operatorname{arctg} f(t)+C$, les déterminations multiples de $\operatorname{arctg} f(t)$ ne faisant que modifier la valeur de la constante arbitraire. Mais il n'en est pas de même de l'intégrale définie $\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{1+f^2(t)}$, elle est bien égale à: $\operatorname{arctg} f(b) - \operatorname{arctg} f(a)$; mais si l'on choisit par $\operatorname{arctg} f(a)$ une de ses déterminations, il faut savoir quelle détermination correspondante prendre de $\operatorname{arctg} f(b)$ pour obtenir la valeur de l'intégrale proposée.

Dans la suite, étant donnée une valeur réelle x, nous représenterons par $\operatorname{arctg} x$ celui des arcs en nombre infini admettant x pour tangente, qui est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire le plus petit en valeur absolue; quand x variera d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, $\operatorname{arctg} x$ variera donc d'une manière continue de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.

Ceci posé, on voit que l'expression de l'intégrale $\int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)}$ se présente sous la forme:

$$\operatorname{arc\,tg} f(b) - \operatorname{arc\,tg} f(a) + n\pi,$$

de sorte que la question proposée est ramenée à la détermination du nombre entier n.

Considérons à cet effet l'intégrale:

$$J = \int_a^t \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)};$$

je dis en premier lieu qu'elle représente une fonction continue de t, dans tout l'intervalle où les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ considérées plus haut sont uniformes, et conservent la même expression analytique. Entre ces limites de la variable la fonction $f(t)$ est elle-même alors uniforme et nous admettrons qu'elle s'exprime par le quotient de deux fonctions holomorphes $\frac{G_1(t)}{G(t)}$.

Ceci posé, donnons à t l'accroissement h, et soit J' la nouvelle valeur de l'intégrale considérée on aura :

$$J' - J = \int_t^{t+h} \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)} = h\,\frac{f'(\theta)}{1+f^2(\theta)},$$

θ désignant une quantité comprise entre t et $t+h$; sous les conditions admises, on voit alors immédiatement que $\frac{f'(\theta)}{1+f^2(\theta)}$ est une quantité finie, quelle que soit la valeur de t ; en effet, on peut écrire cette expression sous la forme :

$$\frac{G_1'(\theta)\,G(\theta) - G_1(\theta)\,G'(\theta)}{G_1^2(\theta) + G^2(\theta)} ;$$

et si cette quantité devenait infinie, $G_1(\theta)$ et $G(\theta)$ seraient nuls en même temps, ce qui est impossible car la fraction $\frac{G_1(t)}{G(t)}$ peut être supposée réduite à sa plus simple expression. Ce qu'il y a d'essentiel dans ce raisonnement, c'est que $f(t)$ est sous la forme $\frac{G_1(t)}{G(t)}$ et représente par conséquent une fonction uniforme qui n'a que des pôles.

Ce point établi, reprenons l'expression de

$$J = \int_a^t \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)},$$

par la formule :

$$\operatorname{arc\,tg} f(t) - \operatorname{arc\,tg} f(a) + n\pi.$$

Pour $t = a$, on a $J = 0$ et par suite $n = 0$; cela étant, lorsque t croît à partir de a par degrés insensibles, n reste nécessairement nul tant que $\operatorname{arctg} f(t)$ reste fonction continue de t, c'est à dire tant que $f(t)$ reste finie.

Supposons que pour $t = k$, $f(t)$ devenant infini soit positif quand t est $< k$ et négatif quand t est $> k$.

Nous pourrons représenter la succession des valeurs de $\operatorname{arctg} f(k-\varepsilon)$ quand l'infiniment petit positif ε tend vers zéro, par la série des quantités :

$$\frac{\pi}{2} - \alpha_1, \quad \frac{\pi}{2} - \alpha_2, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\pi}{2},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$ vont en décroissant jusqu'à zéro. La série des valeurs de $\operatorname{arctg} f(k+\varepsilon)$, en faisant croître ε à partir de zéro, sera de même :

$$-\frac{\pi}{2}, \quad -\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right), \quad -\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right), \ldots\ldots$$

les termes $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots$ allant en augmentant ; de sorte que, quand t varie d'une manière continue de $k-\varepsilon$ à $k+\varepsilon$, nous avons pour $f(t)$ la série suivante de valeurs :

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right), \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right), \ldots\ldots \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \ldots\ldots -\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right), -\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right), \ldots\ldots$$

dont la discontinuité est manifeste.

Mais on voit qu'il suffit d'ajouter π aux termes de la seconde suite pour obtenir un ensemble de valeurs continues, en la réunissant à la première. Nous devons par conséquent, pour former

l'expression de J, faire $n=1$, à partir de la valeur $n=k$, et cette expression subsistera jusqu'à ce que $f(t)$ devienne de nouveau infini. Raisonnant alors de la même manière, on voit que quand $f(t)$ devient de nouveau infini en passant du positif au négatif, il faut augmenter n d'une unité, on voit également que le passage par l'infini, se faisant du négatif au positif, on diminuera n d'une unité; tandis que $f(t)$ devenant infini sans changer de signe, ce nombre n ne change pas.

L'expression de l'intégrale $J=\int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)}$, est donc $J=\operatorname{arctg} f(b)-\operatorname{arctg} f(a)+n\pi$, n désignant l'excès du nombre de fois que $f(t)$ devient infinie en passant du positif au négatif, sur le nombre de fois que $f(t)$ devient infinie en passant du négatif au positif, lorsque la variable croît de $t=a$ à $t=b$. Le nombre n est ce que Cauchy a appelé l'indice de la fonction $f(t)$ entre les limites a et b.

Considérons ensuite un second intervalle correspondant à une nouvelle portion du chemin décrit par la variable z, dans lequel $f(t)$ soit remplacé par une autre fonction uniforme $f_1(t)$, et supposons qu'alors t croisse de $t=a'$ à $t=b'$. Les deux chemins se suivent sans interruption, on a donc la condition:

$$f(b)=f_1(a');$$

cela étant nommons: J' l'intégrale relative à $f_1(t)$, n' l'indice correspondant; en ajoutant membre à membre, les relations:

$$J'=\text{arc tg } f_1(b')-\text{arc tg } f_1(a')+n'\pi$$
$$J=\text{arc tg } f(b)-\text{arc tg } f(a)+n\pi$$

on obtiendra:

$$J+J'=\text{arc tg } f_1(b')-\text{arc tg } f(a)+(n+n')\pi.$$

Or on voit que dans cette égalité, $J+J'$ étant l'intégrale que nous considérons à l'égard du chemin composé de deux parties, la somme $n+n'$ représente encore, en suivant ce chemin, l'excès du nombre de fois que le quotient $\frac{Q}{P}$ devient infini en passant du positif au négatif, sur le nombre de fois qu'il devient infini en passant du négatif au positif. Continuons ainsi de proche en proche, jusqu'à revenir au point de départ en décrivant un contour fermé. Soit V, l'indice de $\frac{Q}{P}$, J l'intégrale pour tout ce contour, on aura la relation:

$$J=V\pi,$$

et en rapprochant ce résultat de la valeur $J=2\mu\pi$, nous obtenons pour le nombre des racines de l'équation $G(z)=0$, qui sont comprises à l'intérieur du contour, l'expression découverte par Cauchy:

$$\mu=\frac{V}{2}.$$

Nous allons maintenant donner le procédé de calcul du grand géomètre, pour déterminer l'indice, lorsque $f(t)$ est le quotient de deux polynômes, l'équation $G(z)=0$ étant algébrique. C'est ce qui arrivera lorsque les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ seront rationnelles, ces expressions pouvant d'ailleurs, comme nous l'avons dit, changer de forme, dans les diverses parties du contour. Il y a même des circonstances plus générales, dans lesquelles l'indice peut encore se calculer; l'équation de Képler en donne un exemple intéressant par lequel nous renvoyons à un travail de M. Gourier (Annales de l'École Normale Supérieure, 1878). Nous nous fonderons sur la remarque suivante, qui a lieu

Ceci posé, donnons à t l'accroissement h, et soit J' la nouvelle valeur de l'intégrale considérée on aura :

$$J' - J = \int_t^{t+h} \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)} = h\,\frac{f'(\theta)}{1+f^2(\theta)},$$

θ désignant une quantité comprise entre t et $t+h$; sous les conditions admises, on voit alors immédiatement que $\frac{f'(\theta)}{1+f^2(\theta)}$ est une quantité finie, quelle que soit la valeur de t ; en effet, on peut écrire cette expression sous la forme :

$$\frac{G_1'(\theta)\,G(\theta) - G_1(\theta)\,G'(\theta)}{G_1^2(\theta) + G^2(\theta)} ;$$

et si cette quantité devenait infinie, $G_1(\theta)$ et $G(\theta)$ seraient nuls en même temps, ce qui est impossible car la fraction $\frac{G_1(t)}{G(t)}$ peut être supposée réduite à sa plus simple expression. Ce qu'il y a d'essentiel dans ce raisonnement, c'est que $f(t)$ est sous la forme $\frac{G_1(t)}{G(t)}$ et représente par conséquent une fonction uniforme qui n'a que des pôles.

Ce point établi, reprenons l'expression de

$$J = \int_a^t \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)},$$

par la formule :

$$\text{arc tg } f(t) - \text{arc tg } f(a) + n\pi.$$

Pour $t = a$, on a $J = 0$ et par suite $n = 0$; cela étant, lorsque t croît à partir de a par degrés insensibles, n reste nécessairement nul tant que $\text{arctg } f(t)$ reste fonction continue de t, c'est à dire tant que $f(t)$ reste finie.

Supposons que pour $t = k$, $f(t)$ devenant infini soit positif quand t est $< k$ et négatif quand t est $> k$.

Nous pourrons représenter la succession des valeurs de $\text{arctg } f(k-\varepsilon)$ quand l'infiniment petit positif ε tend vers zéro, par la série des quantités :

$$\frac{\pi}{2} - \alpha_1, \quad \frac{\pi}{2} - \alpha_2, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\pi}{2},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$ vont en décroissant jusqu'à zéro. La série des valeurs de $\text{arctg } f(k+\varepsilon)$, en faisant croître ε à partir de zéro, sera de même :

$$-\frac{\pi}{2}, \quad -\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right), \quad -\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right), \ldots\ldots$$

les termes $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots$ allant en augmentant ; de sorte que, quand t varie d'une manière continue de $k-\varepsilon$ à $k+\varepsilon$, nous avons pour $f(t)$ la série suivante de valeurs :

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right), \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right), \ldots\ldots \frac{\pi}{2}, \; -\frac{\pi}{2}, \ldots\ldots -\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right), -\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right), \ldots\ldots$$

dont la discontinuité est manifeste.

Mais on voit qu'il suffit d'ajouter π aux termes de la seconde suite pour obtenir un ensemble de valeurs continues, en la réunissant à la première. Nous devons par conséquent, pour former

l'expression de J, faire $n=1$, à partir de la valeur $n=k$, et cette expression subsistera jusqu'à ce que $f(t)$ devienne de nouveau infini. Raisonnant alors de la même manière, on voit que quand $f(t)$ devient de nouveau infini en passant du positif au négatif, il faut augmenter n d'une unité, on voit également que le passage par l'infini, se faisant du négatif au positif, on diminuera n d'une unité; tandis que $f(t)$ devenant infini sans changer de signe, ce nombre n ne change pas.

L'expression de l'intégrale $J=\int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)}$, est donc $J=\operatorname{arctg} f(b)-\operatorname{arctg} f(a)+n\pi$, n désignant l'excès du nombre de fois que $f(t)$ devient infinie en passant du positif au négatif, sur le nombre de fois que $f(t)$ devient infinie en passant du négatif au positif, lorsque la variable croît de $t=a$ à $t=b$. Le nombre n est ce que Cauchy a appelé l'indice de la fonction $f(t)$ entre les limites a et b.

Considérons ensuite un second intervalle correspondant à une nouvelle portion du chemin décrit par la variable z, dans lequel $f(t)$ soit remplacé par une autre fonction uniforme $f_1(t)$, et supposons qu'alors t croisse de $t=a'$ à $t=b'$. Les deux chemins se suivent sans interruption, on a donc la condition:

$$f(b)=f_1(a');$$

cela étant, nommons: J' l'intégrale relative à $f_1(t)$, n' l'indice correspondant; en ajoutant membre à membre, les relations:

$$J'=\operatorname{arc\,tg} f_1(b')-\operatorname{arc\,tg} f_1(a')+n'\pi$$
$$J=\operatorname{arc\,tg} f(b)-\operatorname{arc\,tg} f(a)+n\pi$$

on obtiendra:

$$J+J'=\operatorname{arc\,tg} f_1(b')-\operatorname{arc\,tg} f(a)+(n+n')\pi.$$

Or on voit que dans cette égalité, $J+J'$ étant l'intégrale que nous considérons à l'égard du chemin composé de deux parties, la somme $n+n'$ représente encore, en suivant ce chemin, l'excès du nombre de fois que le quotient $\frac{Q}{P}$ devient infini en passant du positif au négatif, sur le nombre de fois qu'il devient infini en passant du négatif au positif. Continuons ainsi de proche en proche, jusqu'à revenir au point de départ en décrivant un contour fermé. Soit V, l'indice de $\frac{Q}{P}$, J l'intégrale pour tout ce contour, on aura la relation:

$$J=V\pi,$$

et en rapprochant ce résultat de la valeur $J=2\mu\pi$, nous obtenons pour le nombre des racines de l'équation $G(z)=0$, qui sont comprises à l'intérieur du contour, l'expression découverte par Cauchy:

$$\mu=\frac{V}{2}.$$

Nous allons maintenant donner le procédé de calcul du grand géomètre, pour déterminer l'indice, lorsque $f(t)$ est le quotient de deux polynômes, l'équation $G(z)=0$ étant algébrique. C'est ce qui arrivera lorsque les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ seront rationnelles, car expressions pouvant d'ailleurs, comme nous l'avons dit, changer de forme, dans les diverses parties du contour. Il y a même des circonstances plus générales, dans lesquelles l'indice peut encore se calculer; l'équation de Képler en donne un exemple intéressant par lequel nous renvoyons à un travail de M. Gourier (Annales de l'École Normale Supérieure, 1878). Nous nous fonderons sur la remarque suivante, qui a lieu

en général, quelle que soit la fonction $f(t)$.

Pour l'établir, je reprends la relation :

$$J=\int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)} = \operatorname{arc\,tg} f(b) - \operatorname{arc\,tg} f(a) + n\pi ;$$

remplaçons $f(t)$ par $\frac{1}{f(t)}$, et désignons alors par J' la valeur de l'intégrale, et par n', l'indice correspondant ; on aura l'égalité :

$$J' = -\int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{f(b)} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{f(a)} + n'\pi .$$

En l'ajoutant membre à membre avec la précédente, on en conclut :

$$(n+n')\pi = \operatorname{arc\,tg} f(a) + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{f(a)} - \operatorname{arc\,tg} f(b) - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{f(b)} ;$$

or la somme $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ a pour valeur $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ selon que x est positif ou négatif. On parvient ainsi à la relation $n+n' = \varepsilon$, où ε se détermine comme il suit :

$$\text{I.}\quad f(a)f(b)>0, \qquad \varepsilon = 0 ,$$
$$\text{II.}\quad f(a)>0,\ f(b)<0, \qquad \varepsilon = 1 ,$$
$$\text{III.}\quad f(a)<0,\ f(a)>0, \qquad \varepsilon = -1 .$$

C'est de cette relation entre les indices n, n' des deux fonctions inverses $f(t)$, $\frac{1}{f(t)}$ prises entre les mêmes limites a et b, que résulte la règle que nous allons maintenant exposer.

Soit $f(t) = \frac{V_1}{V}$, V et V_1 étant deux polynômes entiers. Posons, en effectuant sur ces polynômes l'opération du plus grand commun diviseur, et changeant les signes des restes :

$$V = V_1 Q_1 - V_2$$
$$V_1 = V_2 Q_2 - V_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$V_{n-1} = V_n Q_n - V_{n+1} .$$

Nous supposons V et V_1 sans diviseurs communs, il en résulte que V_n est une quantité constante, et que V_{n+1} est nul par conséquent.

Cela posé, je désigne pour abréger par la notation $[f(t)]$ l'indice de la fonction $f(t)$, entre les limites $t=a$, $t=b$; nous aurons ainsi :

$$\left(\frac{V}{V_1}\right) + \left(\frac{V_1}{V}\right) = \varepsilon_1 ,$$

ε_1 ayant la valeur $0, 1$, ou -1 qui s'obtient comme nous l'avons vu, au moyen des signes que prennent V et V_1, pour $t=a$ et $t=b$.

Nous aurons pareillement :

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right) + \left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \varepsilon_2$$
$$\vdots$$
$$\left(\frac{V_{n-1}}{V_n}\right) + \left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right) = \varepsilon_n .$$

D'autre part de la relation :

$$\frac{V}{V_1} = Q_1 - \frac{V_2}{V_1}$$

on déduit :

$$\left(\frac{V}{V_1}\right) + \left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 0,$$

car Q_1 ne devient jamais infini, et lorsque V_1 s'annule, $\frac{V}{V_1}$ et $\frac{V_2}{V_1}$ sont de signes contraires. On a de même :

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right) + \left(\frac{V_3}{V_2}\right) = 0$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{V_{n-2}}{V_{n-1}}\right) + \left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right) = 0.$$

En ajoutant alors membre à membre les égalités de la première série, et tenant compte des relations précédentes, il vient simplement :

$$\left(\frac{V_1}{V}\right) + \left(\frac{V_{n-1}}{V_n}\right) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_n \; ;$$

or, V_n étant une constante, $\left(\frac{V_{n-1}}{V_n}\right)$ est nul, et nous obtenons la valeur cherchée de l'indice :

$$\left(\frac{V_1}{V}\right) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots\ldots + \varepsilon_n .$$

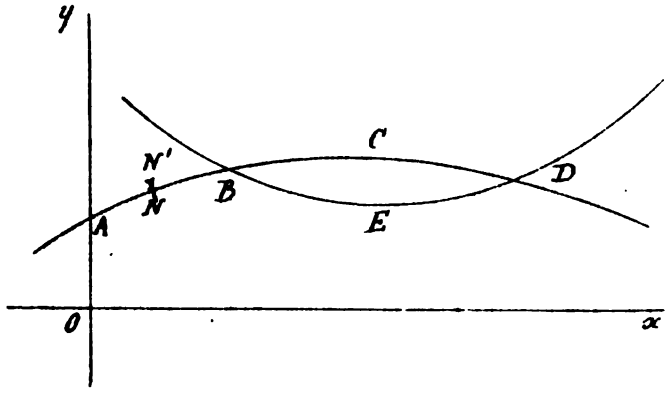
Dans le cas où le polynôme V_1 est la dérivée de V, on sait que le quotient $\frac{V'}{V}$ passe toujours, en devenant infini, du négatif au positif. L'indice, qui est alors négatif, donne en valeur absolue le nombre des racines réelles de l'équation $V = 0$, comprises entre les deux limites a et b. De cette remarque se conclut aisément le théorème de Sturm, sous la forme qu'on lui donne dans l'algèbre élémentaire.

Avant d'aller plus loin, et d'aborder la recherche des racines elles-mêmes, nous ferons encore une remarque sur la fonction arc tg x qui offre, telle que nous l'avons définie, le premier exemple qu'on rencontre dans les éléments d'une fonction discontinue. Soit $F(x,y)$, $G(x,y)$, deux fonctions holomorphes, et $f(x,y)$ une fonction quelconque des variables x et y ; je considère l'expression :

$$\Phi(x,y) = f(x,y) \operatorname{arc\,tg} \frac{F(x,y)}{G(x,y)}$$

et je construis les courbes, $ABCD$, BED, représentées par les équations

$$G(x,y) = 0, \qquad F(x,y) = 0 .$$



Pour tous les points de la première, le quotient $\frac{F(x,y)}{G(x,y)}$ est infini, et si l'on envisage sur la normale en un point de AB, par exemple, deux points infiniment voisins du point de rencontre, N et N', on a la conclusion suivante. Si l'on suppose le rapport $\frac{F(x,y)}{G(x,y)}$ positif en N, il devient négatif en N' ; les arcs tangentes correspondants sont

sensiblement $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, de sorte que la différence des valeurs de $\Phi(x,y)$ aux deux points N' et N a pour valeur : $-\pi f(x,y)$. En passant ensuite à l'arc BCD compris entre deux points de rencontre avec la courbe $F(x,y)=0$, le signe du rapport change dans cet intervalle, et la variation de la fonction pour deux points en regard est alors : $+\pi f(x,y)$. Nous voyons ainsi que la courbe ABCD joue le rôle de coupure à l'égard de la fonction $\Phi(x,y)$.

La série de Lagrange dont nous allons actuellement nous occuper a pour objet d'obtenir l'une des racines d'une équation de la forme suivante : $z-a-\alpha f(z)=0$, qui est d'une grande généralité la fonction $f(z)$ pouvant être quelconque, avec la condition de rester holomorphe dans une partie du plan. C'est une question fondamentale pour l'astronomie, la résolution de l'équation célèbre : $u=nt+e\sin u$ qu'on nomme l'équation de Képler qui a conduit, par une généralisation naturelle à cette série. On sait effectivement que les coordonnées d'une planète ne s'expriment pas en fonction uniforme du temps mais on peut les obtenir en fonction uniforme de l'anomalie excentrique u, qui elle-même est donnée en fonction du temps par la relation précédente, où n est le moyen mouvement.

Cette équation est donc un cas particulier de l'équation générale :

$$z=a+\alpha f(z)$$

que nous étudions maintenant.

Nous voulons établir qu'elle possède une racine développable en série convergente ordonnée par rapport aux puissances croissantes de α ; mais il est nécessaire de spécifier quelle est cette racine, et dans ce but, nous allons démontrer le lemme suivant :

Soit F et Φ, deux fonctions holomorphes, les équations :

$$F=0, \qquad F+\Phi=0$$

ont le même nombre de racines comprises dans un contour fermé S, si tout le long de ce contour, on a constamment : $\mod \frac{\Phi}{F}<1$. Les nombres μ et μ_1 des racines de ces équations comprises à l'intérieur du contour S, sont exprimés par les formules :

$$\mu=\frac{1}{2i\pi}\int_{(S)} d\left[\log\left(F(z)\right)\right],$$

$$\mu_1=\frac{1}{2i\pi}\int_{(S)} d\left[\log\left(F(z)+\Phi(z)\right)\right].$$

Nous obtenons ainsi :

$$\mu_1-\mu=\frac{1}{2i\pi}\int_{(S)} d\left[\log\left(1+\frac{\Phi}{F}\right)\right],$$

et comme par hypothèse, tout le long du contour d'intégration le module de $\frac{\Phi}{F}$ est moindre que l'unité, la valeur de $\log\left(1+\frac{\Phi}{F}\right)$ est la même à l'arrivée et au départ, l'intégrale qui donne $\mu_1-\mu$ est donc nulle et nous avons : $\mu_1=\mu$.

Appliquons ceci à l'équation :

$$z-a-\alpha f(z)=0\,;$$

supposons que a soit l'affixe d'un point situé à l'intérieur du contour S, et que α soit déterminé par la condition qu'on ait sur tous les points de ce contour :

$$\mod \frac{\alpha f(z)}{z-a}<1.$$

Alors, l'équation proposée a le même nombre de racines que l'équation $z-a=0$, c'est-à-dire une seule. C'est cette racine ainsi déterminée que nous allons développer en série convergente.

On trouve dans les travaux de Cauchy d'autres modes de spécification; mais il en résulte de nombreuses difficultés qui ont donné lieu à un beau et savant mémoire de Félix Chio, inséré au tome XII des Savants Étrangers. Nous renverrons aussi sur ce sujet au travail du même auteur, intitulé: Troisième mémoire sur la série de Lagrange, dans les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Turin (Tome VIII, Avril 1872), ainsi qu'à un article de M. Genocchi, inséré dans les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (29 Décembre 1873). La méthode que nous avons employée est exempte de ces difficultés; elle est empruntée à un excellent mémoire de M. Rouché, sur la série de Lagrange (Journal de l'École Polytechnique, 39ᵉ Cahier).

XIX^ème Leçon.

Nous avons vu que l'équation:

$$F(z) = z - a - \alpha f(z) = 0$$

a une seule racine ζ à l'intérieur du contour S, lorsque tout le long de ce contour, la condition:

$$\operatorname{mod} \frac{\alpha f(z)}{z-a} < 1$$

est satisfaite. Au lieu d'exprimer cette racine ζ à l'aide d'une intégrale curviligne effectuée le long de S, nous allons la développer en série convergente, ce qui est d'un grand avantage pour le calcul numérique.

Soit $\Pi(z)$ une fonction holomorphe quelconque de z; le résidu de la fonction $\frac{\Pi(z)}{F'(z)}$ relatif à la racine ζ du dénominateur, a pour valeur $\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)}$, et l'on a par suite:

$$\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = \frac{1}{2i\pi}\int_{(S)} \frac{\Pi(z)\,dz}{F(z)}.$$

La méthode à suivre pour développer en série l'intégrale, est celle dont nous avons déjà fait usage, quand nous avons établi la série de Taylor.

A cet effet, nous partirons de l'identité suivante:

$$\frac{1}{F(z)} = \frac{1}{z-a-\alpha f(z)} = \frac{1}{z-a} + \alpha\frac{f(z)}{(z-a)^2} + \alpha^2\frac{f^2(z)}{(z-a)^3} + \cdots\cdots + \alpha^{n-1}\frac{f^{n-1}(z)}{(z-a)^n} + \alpha^n\frac{f^n(z)}{(z-a)^n F(z)}.$$

Soit de plus:

$$J_K = \frac{1}{2i\pi}\int_{(S)} \frac{f^K(z)\,\Pi(z)}{(z-a)^{K+1}}\,dz$$

et $$R_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{(S)} \frac{\alpha^n f^n(z)\Pi(z)}{(z-a)^n F'(z)}\,dz.$$

En multipliant les deux membres par $\Pi(z)\,dz$, et intégrant le long du contour, nous obtenons :

$$\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = J_0 + \alpha J_1 + \alpha^2 J_2 + \ldots\ldots + \alpha^{n-1} J_{n-1} + R_n$$

Soit maintenant σ le périmètre de la courbe S, z_0 l'affixe d'un de ses points, et λ le facteur de M. Darboux, nous pourrons écrire :

$$R_n = \frac{\lambda\sigma}{2\pi}\,\frac{\Pi(z_0)}{F'(z_0)}\left[\frac{\alpha f(z_0)}{z_0 - a}\right]^n.$$

Or, on a pour tous les points du contour, la condition $\mod\left[\frac{\alpha f(z)}{z-a}\right] < 1$. Le reste R_n tend donc vers zéro quand n augmente au-delà de toute limite, et nous obtenons :

$$\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = J_0 + \alpha J_1 + \alpha^2 J_2 + \ldots\ldots + \alpha^n J_n + \ldots,$$

la série du second membre étant convergente. L'expression des coefficients J est facile à trouver ; nous avons vu en effet que l'on a généralement :

$$\frac{1}{1.2.\ldots.n}\,D^n\Phi(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(S)} \frac{\Phi(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} ;$$

on en conclut en posant : $\Phi(z) = f(z)\,\Pi(z)$,

$$J_K = \frac{D_a^K\left[f^K(a)\Pi(a)\right]}{1.2.3.\ldots.K},$$

nous arrivons ainsi à la formule :

$$\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^n}{1.2.3.\ldots.n}\,D_a^n\left[f^n(a).\Pi(a)\right]$$

C'est là une première forme analytique de la série de Lagrange ; nous allons en déduire une seconde non moins importante. Posons :

$$\Pi(z) = \Phi(z)F'(z) = \Phi(z)\left[1 - \alpha f'(z)\right].$$

Il vient alors :

$$\Phi(\zeta) = \sum \frac{1}{1.2.\ldots.n}\,D_a^n\left[f^n(a)\,\Phi(a)(1-\alpha f'(a))\right],$$

ce qu'on peut encore écrire en isolant le premier terme de la première partie correspondant à $n=0$, et mettant pour abréger, Φ et f, à la place de $\Phi(a)$ et $f(a)$:

$$\Phi(\zeta) = \Phi + \sum \frac{\alpha^{n+1}}{1.2.\ldots.n+1}\,D_a^{n+1}\left(\Phi f^{n+1}\right) - \sum \frac{\alpha^{n+1}}{1.2.\ldots.n}\,D_a^n\left(\Phi f^n f'\right)$$

$$= \Phi + \sum \frac{\alpha^{n+1}}{1.2.\ldots.(n+1)}\,D_a^n\left[(\Phi f^{n+1})' - (n+1)\Phi f^n f'\right],$$

ce qui devient finalement :

$$\Phi(\zeta) = \Phi(a) + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{1.2.\ldots.(n+1)}\,D_a^n\left[\Phi'(a) f^{n+1}(a)\right].$$

Telle est la forme analytique de la série de Lagrange la plus employée pour les applications.

Dans le traité de la Résolution des Equations Numériques, Lagrange a observé qu'en remplaçant la fonction Φ par le produit de deux fonctions Φ_1, Φ_2, on obtient le développement en série de $\Phi_1(\zeta)\times\Phi_2(\zeta)$, et que d'autre part ce développement résulte nécessairement de la multiplication des deux séries qui donnent les développements de $\Phi_1(\zeta)$ et $\Phi_2(\zeta)$. En égalant les coefficients des mêmes puissances de α, obtenus par ces deux méthodes, on obtient des identités, qui peuvent donner lieu à des exercices de calcul intéressants sur les dérivées.

Comme nous l'avons déjà dit, l'une des principales applications de la série de Lagrange concerne l'équation de Képler, $z = nt + e\sin z$.

En posant pour abréger $nt = a$, et employant pour effectuer les différentiations l'expression d'une puissance quelconque de $\sin a$ en fonction linéaire des sinus ou cosinus des arcs multiples, on obtient ces résultats, à savoir :

$$z = a + e\sin a + \frac{e^2}{2.2}2\sin 2a + \frac{e^3}{2.3.2^2}(3^2\sin 3a - 3\sin a)$$
$$+\frac{e^4}{2.3.4.2^3}(4^3\sin 4a - 4.2^3\sin 2a)$$
$$+\frac{e^5}{2.3.4.5.2^4}(5^4\sin 5a - 5.3^4\sin 3a + \frac{4.5}{1.2}\sin a)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos z = \cos a + \frac{e}{2}(\cos 2a - 1) + \frac{e^2}{2.2^2}(3\cos 3a - 3\cos a)$$
$$+\frac{e^3}{2.3.2^3}(4^2\cos 4a - 4.2^2\cos 2a) + \frac{e^4}{2.3.4.2^4}(5^3\cos 5a - 5.3^3\cos 3a + \frac{4.5}{1.2}\cos a)$$
$$+\frac{e^5}{2.3.4.5.2^5}(6^4\cos 6a - 6.4^4\cos 4a + \frac{5.6}{1.2}2^4\cos 2a)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Laplace a trouvé le premier par une analyse extrêmement belle que ces développements sont convergents tant que e sera inférieur à la limite $0,6627434\ldots$, et Cauchy a confirmé cette conclusion si importante pour l'astronomie par une méthode plus directe et plus facile qu'on trouvera exposée avec élégance dans le mémoire que nous avons déjà cité de M. Rouché.

La série de Lagrange s'applique sous un autre point de vue à des questions d'analyse ; l'exemple suivant qui est dû à Jacobi (Journal de Crelle, t. II), nous permettra de dire quelques mots des fonctions connues sous le nom de polynômes de Legendre.

D'importantes questions de mécanique céleste conduisent à rechercher le développement en série ordonnée suivant les puissances de α de la quantité $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$. Les coefficients X_n des puissances de α dans ce développement sont les polynômes qui portent le nom de Legendre. Ce grand géomètre en a le premier découvert les propriétés par une analyse qui est un chef-d'œuvre d'invention et d'élégance. Indiquons encore qu'on passe de ces polynômes aux expressions qu'on nomme fonctions de Laplace, en y remplaçant la variable x par l'expression : $\cos\varphi\cos\psi + \cos A\sin\varphi\sin\psi$, qui représente le troisième côté d'un triangle sphérique. On obtient ainsi des fonctions des deux variables φ et ψ qui jouent un rôle de la plus grande importance dans les applications de l'analyse. Elles servent à résoudre des questions difficiles de la théorie de la chaleur ; et en s'appuyant sur leurs propriétés, découvertes par Legendre, Laplace a pu montrer que, dans le phénomène des marées, la mer n'était soumise qu'à des oscillations, et ne

recouvrait par la surface entière du globe, à cause de cette circonstance que la densité de l'eau est inférieure à celle du globe terrestre.

Jacobi a donné une autre origine aux polynômes de Legendre, et de la forme sous laquelle il obtient leur expression, résultent immédiatement leurs propriétés fondamentales.

Dans l'équation $z = a + \alpha f(z)$, faisons $f(z) = \frac{z^2-1}{2}$; nous avons ainsi une équation du second degré $az^2 - 2z + 2a - \alpha = 0$ dont les racines sont : $\frac{1 \pm \sqrt{1 - 2a^2 + a\alpha}}{a}$. Celle qui est développable par la série de Lagrange, devant se réduire à a pour $\alpha = 0$, a pour valeur :

$$\zeta = \frac{1 - \sqrt{1 - 2a^2 + a\alpha}}{\alpha}$$

Ceci posé, faisons dans la première forme de la série de Lagrange $\Pi(z) = 1$; il vient alors, puisque $f'(z) = z$:

$$\frac{1}{1 - \alpha\zeta} = \Sigma \frac{\alpha^n}{2^n . 1.2 \ldots n} D^n (a^2 - 1)^n,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2a\alpha + \alpha^2}} = \Sigma \frac{\alpha^n}{2.4.6 \ldots 2n} D^n (a^2 - 1)^n.$$

L'expression générale des polynômes de Legendre est donc :

$$X_n = \frac{1}{2.4.6 \ldots 2n} D^n (x^2 - 1)^n.$$

Sous cette forme, on démontre sans peine un grand nombre de propriétés remarquables de ces polynômes, auxquelles Legendre n'est parvenu que par une analyse plus longue. En premier lieu, l'équation $X_n = 0$ a toutes ses racines réelles, distinctes, et comprises entre -1 et $+1$. Voici comment on peut démontrer cette proposition à l'aide du théorème de Rolle. L'équation $(x^2-1)^n = 0$ a pour racines 1 et -1 et ces racines sont chacune d'ordre n de multiplicité. La dérivée $D_x (x^2-1)^n = 0$, admet par suite 1 et -1 comme racines d'ordre $n-1$ de multiplicité, et de plus une racine réelle x_0 comprise entre -1 et $+1$. La dérivée seconde $D_x^2 (x^2-1)^n = 0$ admet donc 1 et -1 comme racines d'ordre $n-2$ et de plus deux racines réelles, l'une comprise entre -1 et x_0, l'autre entre x_0 et $+1$. En continuant ainsi de proche en proche, on voit que $D^n (x^2-1)^n = 0$, ou $X_n = 0$ a n racines réelles inégales et comprises entre -1 et $+1$.

J'indiquerai encore en me bornant à les énoncer les propriétés suivantes :

Les indices m et n étant différents, on a la relation :

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n \, dx = 0,$$

et s'ils sont égaux :

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Le polynôme X_n développé suivant les puissances décroissantes de la variable, s'exprime par la formule :

$$X_n = \frac{1.3.5 \ldots 2n-1}{1.2.3 \ldots n} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \ldots \right]$$

Trois fonctions consécutives X_{n-1}, X_n, X_{n+1} sont liées par l'égalité :

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0,$$

et on peut en conclure la réalité des racines de l'équation $X_n = 0$ par une méthode analogue à celle que l'on emploie pour établir le théorème de Sturm.

La fonction X_n satisfait à une équation différentielle du second ordre qui se présente souvent en analyse, à savoir :

$$(x^2-1)\frac{d^2X_n}{dx^2} + 2x\frac{dX_n}{dx} - n(n+1)X_n = 0.$$

Je dirai enfin quelques mots d'une propriété, découverte simultanément par M. Tchebicheff et M. Heine, qui se rattache à une théorie importante d'analyse ; celle des fractions continues algébriques.

Le point essentiel de cette théorie consiste à former des fractions rationnelles, appelées réduites, dont les dénominateurs seront successivement des degrés 1, 2, 3, ... n, et qui approcheront de plus en plus d'une série :

$$S = \frac{\alpha_0}{x} + \frac{\alpha_1}{x^2} + \cdots\cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{x^n} + \cdots\cdots;$$

C'est ce que l'on peut voir à priori, et sans recourir à l'algorithme des fractions continues, par la méthode des coefficients indéterminés.

Soit en effet :

$$A = a_0 + a_1 x + \cdots\cdots + a_n x^n,$$

je dispose des quantités $a_0, a_1, \ldots a_n$, de manière que le produit AS manque des termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots \frac{1}{x^n}$; j'obtiens ainsi les équations :

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \cdots\cdots + \alpha_n a_n = 0\\
&\alpha_1 a_0 + \alpha_2 a_1 + \cdots\cdots + \alpha_{n+1} a_n = 0\\
&\alpha_2 a_0 + \alpha_3 a_1 + \cdots\cdots + \alpha_{n+2} a_n = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_{n-1} a_0 + \alpha_n a_1 + \cdots\cdots + \alpha_{2n-1} a_n = 0,
\end{aligned}$$

qui déterminent le polynôme A, sauf un facteur constant. Cela étant, on aura :

$$AS = B + \frac{\varepsilon}{x^{n+1}} + \frac{\varepsilon'}{x^{n+2}} + \cdots\cdots$$

en désignant par B un polynôme de degré $n-1$, et par conséquent :

$$S = \frac{B}{A} + \frac{1}{A}\left(\frac{\varepsilon}{x^{n+1}} + \frac{\varepsilon'}{x^{n+2}} + \cdots\cdots\right)$$

Cette relation montre que le développement suivant les puissances descendantes de la variable, de la fraction rationnelle $\frac{B}{A}$, coïncide avec la série S, jusqu'aux termes en $\frac{1}{x^{2n}}$, puisque l'expression $\frac{1}{A}\left(\frac{\varepsilon}{x^{n+1}} + \frac{\varepsilon'}{x^{n+2}} + \cdots\right)$ est une suite telle que : $\frac{\delta_1}{x^{2n+1}} + \frac{\delta'}{x^{2n+2}} + \cdots\cdots$

On désigne la fraction $\frac{B}{A}$ sous le nom de réduite d'ordre n, et la théorie des fractions continues algébriques conduit à un algorithme qui de proche en proche donne toutes les réduites ; il nous suffit

ici d'avoir fixé l'ordre d'approximation avec lequel elles expriment la fonction représentée par la série S.

Ceci posé, nous allons démontrer que X_n est précisément le dénominateur de la réduite d'ordre n de la fonction $\log \frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots\ldots\right)$.

Je considère à cet effet, l'intégrale définie :

$$J = \int_{-1}^{+1} (z^2-1)^n D_z^n \left(\frac{1}{x-z}\right) dz,$$

elle s'obtient à l'aide de la formule déjà employée $\int UV^n dx = \Theta + (-1)^n \int VU^n dx$, d'où on conclut facilement :

$$J = \Theta + (-1)^n \int_{-1}^{+1} \frac{D_z^n (z^2-1)^n}{x-z} dz ;$$

Or Θ est nulle, car $(z^2-1)^n$ et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement, s'annulent par $z=1$ et $z=-1$. Il vient donc en remplaçant $D_z^n (z^2-1)^n$ par $2.4.6.\ldots.2n\,Z_n$:

$$\frac{(-1)^n J}{2.4.6.\ldots.2n} = \int_{-1}^{+1} \frac{Z_n\, dz}{x-z}.$$

Cela étant, l'intégrale de la fonction rationnelle se calcule en mettant $Z_n - X_n + X_n$ au lieu de Z_n. Nous amenons ainsi la quantité $\frac{Z_n - X_n}{x-z}$ qui est un polynôme entier du degré $n-1$ en x et en z ; l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{Z_n - X_n}{x-z} dz$ est donc un polynôme en x du degré $n-1$, que nous désignerons par $-P_n$. Nous avons de cette manière :

$$J = \int_{-1}^{+1} X_n \frac{dz}{x-z} - P_n ;$$

et par conséquent :

$$J = X_n \log \frac{x+1}{x-1} - P_n .$$

Ce résultat met en évidence la proposition que nous voulions établir. On voit en effet que le développement de la quantité $D_z^n \left(\frac{1}{x-z}\right)$, suivant les puissances descendantes de x, commençant par un terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$ l'intégrale proposée : $J = \int_{-1}^{+1} (z^2-1)^n D_z^n \left(\frac{1}{x-z}\right) dz$, est de la forme : $\frac{a_0}{x^{n+1}} + \frac{a_1}{x^{n+2}} + \ldots\ldots$ Il en résulte que $\log \frac{x+1}{x-1} - \frac{P_n}{X_n}$ c'est-à-dire $\frac{J}{X_n}$ est une série ordonnée suivant les puissances positives croissantes de $\frac{1}{x}$, et qui commence par un terme $\frac{1}{x^{2n+1}}$; cette propriété est caractéristique, et montre que $\frac{P_n}{X_n}$ est la réduite d'ordre n de $\log \frac{x+1}{x-1}$.

Comme exercice, indiquons que l'intégrale $2^{4n+1} \int_x^\infty \frac{(z-x)^n}{(z^2-1)^n} dz$, a de même pour expression : $X_n \log \frac{x+1}{x-1} - P_n$; on verra facilement, en employant la substitution $\frac{z^2-1}{z-x} = 2t$, donc nous avons déjà fait usage, qu'elle donne la transformée qui a été obtenue par l'intégrale J. Les deux intégrales définies satisfont à l'équation différentielle du second ordre donnée plus haut : $(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$, comme on le vérifie par un calcul facile. La solution complète avec deux constantes arbitraires de cette équation est donc :

$$Y = CX_n + C'\left[X_n \log \frac{x+1}{x-1} - P_n\right].$$

La résolution des équations à l'aide des séries a été longtemps avant les découvertes analytiques de Cauchy, l'objet de travaux importants, qui remontent jusqu'à Newton. On doit à l'auteur du livre des Principes une méthode célèbre, connue sous le nom de règle du parallélogramme analytique qui sert à déterminer les exposants les plus élevés du développement des diverses racines y de toute

équation algébrique, $F(x,y)=0$, suivant les puissances descendantes de x. Nous renverrons à l'ouvrage de MM. Briot et Bouquet où cette règle se trouve complètement exposée au § 34, p. 42; en nous bornant à rappeler que M. Minding en a tiré un procédé extrêmement remarquable pour obtenir exactement le degré de l'équation qui résulte de l'élimination d'une inconnue entre deux équations algébriques entre x et y. Mais nous nous arrêterons un moment à un caractère arithmétique des séries de la forme:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$$

lorsqu'elles proviennent d'une équation algébrique $F(x,y)=0$ dont nous supposerons que les coefficients soient des nombres entiers. On doit à Eisenstein l'un des plus éminents géomètres de notre époque cette remarque bien intéressante qu'il suffit lorsque les coefficients de la série sont commensurables, de changer x, en kx, k désignant un entier convenablement choisi pour qu'ils deviennent tous entiers sauf le premier. C'est ce qu'on établit comme il suit.

Changeons d'abord y en $\alpha_0 + y$, de manière à obtenir une nouvelle équation qui soit satisfaite par $x=0$ et $y=0$. Elle sera, en ordonnant suivant les puissances croissantes de y de la forme: $P + P_1 y + P_2 y^2 + \dots = 0$, P, P_1, P_2, ... étant des polynômes en x dont le premier s'annule pour $x=0$. Pour plus de simplicité, nous admettrons que l'équation n'ait qu'une seule racine qui s'évanouisse avec x, en écrivant donc:

$$\begin{aligned} P &= gx + hx^2 + \dots \\ P_1 &= g_1 + h_1 x + \dots \\ P_2 &= g_2 + h_2 x + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et supposant tous les coefficients entiers, g sera nécessairement différent de zéro. Soit maintenant $x = y_1^2 t$, $y = y_1 u$; on pourra supprimer le facteur g_1^2 dans l'équation entre les nouvelles variables t et u, qui aura la forme suivante:

$$\begin{aligned} Gt + Ht^2 + \dots + [1 + G_1 t + H_1 t^2 + \dots] u \\ + [G_2 + H_2 t + \dots] u^2 \\ + \dots\dots\dots\dots = 0, \end{aligned}$$

$G, G_1, \dots H, H_1, \dots$ étant entiers. Écrivons enfin cette relation comme il suit:

$$u = -\frac{Gt + Ht^2 + \dots}{1 + Gt + H_1 t^2 + \dots} - \frac{G_2 + H_2 t + \dots}{1 + G_1 t + H_1 t^2 + \dots} u^2 - \dots$$

ou encore en effectuant les divisions indiquées:

$$u = At + A't^2 + \dots + (B + B't + \dots) u^2 + \dots$$

et faisons la substitution: $u = mt + m't^2 + m''t^3 + \dots$;
l'identification donne immédiatement les égalités:

$$\begin{aligned} m &= A \\ m' &= A' + Bm^2 \\ m'' &= A'' + 2Bmm' + B'm^2 \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Elles montrent sur le champ que m, m', m'', ... s'exprimant de proche en proche en fonction entière et à coefficients entiers des quantités A, A', ... B, B', ..., qui sont toutes des nombres entiers, seront nécessairement aussi des nombres entiers ; la proposition d'Eisenstein se trouve donc démontrée.

Soit par exemple l'équation : $y^n = (1-x)^{-m}$, qui donne d'après la formule du binôme :

$$y = \Sigma \frac{m(m+n)\ldots\ldots[m+(i-1)n]}{1.2\ldots\ldots i.n^i} x^i$$

nous changerons y en $1+y$, de manière à obtenir la transformée :

$$ny + \frac{n(n-1)}{1.2} y^2 + \ldots\ldots = mx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \ldots$$

On voit ainsi que le nombre désigné plus haut par y_1, a pour valeur n ; par conséquent, la série du binôme dans le cas de l'exposant $-\frac{m}{n}$ se change en une autre dont les coefficients sont des nombres entiers si d'une part on remplace x par $n^2 t$, et qu'ensuite on pose, $y = nu$. On en conclut que l'expression suivante :

$$\frac{n(m+n)\ldots\ldots[m+n(i-1)]n^{i-1}}{1.2.3\ldots\ldots i}$$

se réduit donc toujours à un nombre entier.

Une conséquence immédiate du théorème d'Eisenstein, c'est que e^x et $\log(1+x)$ sont des fonctions transcendantes ; il est clair en effet, que par le changement de x en kx, les séries qui les représentent :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots \pm \frac{x^n}{n} + \ldots\ldots$$

ne pourront jamais avoir tous leurs coefficients entiers.

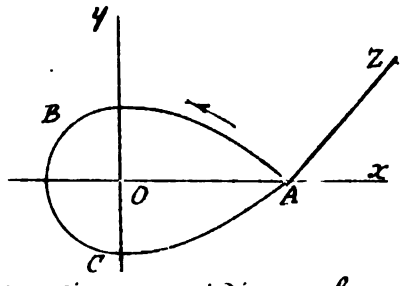
M. Tchebicheff a été plus loin dans cette voie, et est arrivé à des résultats extrêmement dignes d'intérêt. Étant donnée une fonction de x, $\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots\ldots$ ordonnée en série par rapport aux puissances croissantes de x, réduisons chaque coefficient α_n, que nous supposons rationnel, à sa plus simple expression $\frac{m}{d}$. Soit p_n le plus grand des diviseurs premiers de d ; et pour un moment nommons la limite du quotient $\frac{p_n}{n}$ pour $n = \infty$, l'indice de la série. Cela étant, la proposition due à l'illustre géomètre, consiste en ce que si une série à coefficients rationnels résulte d'une fonction composée de fonctions algébriques, logarithmiques et exponentielles en nombre fini, l'indice de la série est nécessairement un nombre fini. Cette condition qui est nécessaire n'est d'ailleurs pas suffisante.

Telle est par exemple, la série $\Sigma \frac{x^n}{n^2+1}$; M. Tchebitcheff a démontré que n^2+1 contient des facteurs premiers qui augmentent indéfiniment avec n ; l'indice de cette série est donc infini ; elle représente donc une transcendante, qui ne peut résulter d'aucune combinaison de fonctions algébriques, exponentielles et logarithmiques en nombre limité.

XX^ème Leçon.

Les racines des équations nous ont présenté un premier exemple de fonctions non uniformes qui, pour chaque valeur de la variable sont susceptibles d'un nombre fini ou infini de déterminations, selon que l'équation est algébrique ou transcendante. Nous allons montrer maintenant comment le calcul intégral conduit à des fonctions non uniformes, d'une indétermination totale, dans ce sens que la variable, en partant d'un point donné pour y revenir après avoir décrit un certain contour, engendre ainsi une succession de valeurs, qui peuvent approcher autant qu'on le veut, d'une quantité arbitraire. Ce fait analytique si important est une conséquence de la conception de l'intégrale définie, telle que l'a donnée Cauchy. Il convient avant de l'exposer, de montrer en premier lieu, comment les déterminations multiples de la fonction $u = \log z$, déduites de l'équation $e^u = z$, résultent de l'intégrale $u = \int_1^z \frac{dz}{z}$.

Nous passerons ensuite facilement du cas d'une indétermination limitée à celui d'une indétermination totale.



Soit $OA = 1$, et Z le point variable dont l'affixe est z.

Considérons le chemin rectiligne AZ. Nous obtiendrons, en suivant ce chemin, une certaine valeur (AZ) pour l'intégrale proposée. Mais décrivons d'abord un contour ABC enveloppant l'origine, dans le sens direct, et revenons à Z par la droite AZ. L'intégrale ainsi obtenue sera $2i\pi + (AZ)$; et en décrivant autant de fois que l'on voudra, dans le sens direct ou indirect, le contour fermé ABC, on trouve ainsi :

$$2ni\pi + (AZ),$$

n étant un entier quelconque positif ou négatif. C'est bien le résultat auquel a conduit la considération de l'équation $e^u = z$.

Plaçons nous à un point de vue plus général et soit :

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz,$$

$f(z)$ désignant une fonction uniforme qui admet un nombre quelconque de discontinuités : $a, b, \ldots$ auxquelles correspondent les résidus $A, B, \ldots$. Soit J l'une des valeurs de l'intégrale quand on effectue, par exemple, l'intégration le long du chemin rectiligne $Z_0 Z$; comme tout-à-l'heure on verra qu'en faisant décrire à la variable des contours comprenant successivement les points $A, B, C, \ldots$ toutes les déterminations de $\Phi(z)$ seront comprises dans la formule :

$$2i\pi(mA + nB + \ldots) + J$$

$m, n, \ldots$ étant des entiers quelconques positifs ou négatifs.

Cette expression, composée des éléments arithmétiques $m, n, \ldots$ et des constantes fixes $A, B, \ldots$, donne lieu à la remarque suivante, qui est d'une grande importance. Considérons le cas de trois résidus A, B, C qu'on devra supposer des quantités réelles ou imaginaires ; on démontre que, si ces quantités ne vérifient point la condition $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$, où α, β, γ sont entiers,

il est possible de disposer des nombres m, n, p de manière que l'expression $mA + nB + pC$ soit moindre que toute quantité donnée. De là résulte que si la fonction $f(z)$ admet trois résidus au moins, l'intégrale est indéterminée, puisqu'elle est susceptible de prendre des valeurs aussi voisines qu'on le veut les unes des autres. Il est donc impossible de concevoir $\Phi(z)$ comme une fonction de z, à moins, ce que M. Puiseux a observé le premier, de faire entrer la quantité z_0 et le chemin suivi de z_0 à z comme éléments nécessaires de la détermination de la fonction. Ce sont des considérations arithmétiques délicates qui conduisent au résultat que nous venons d'indiquer, et qui concernent le cas de trois résidus. Mais voici une autre circonstance où des considérations plus élémentaires suffisent pour mettre en pleine évidence l'indétermination de l'intégrale, ou de la fonction $\Phi(z)$. Envisageons, à cet effet, la quantité :

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} + \frac{\alpha^2}{z^2+\alpha^2},$$

où nous supposons que α soit une constante réelle et incommensurable. Cette fonction admet pour pôles $\pm i$ et $\pm \alpha i$, et les résidus correspondants sont $\pm\frac{1}{2i}$ et $\pm\frac{\alpha}{2i}$; la valeur générale de l'intégrale $\Phi(z)$ est par suite :

$$J + \pi(m - n\alpha),$$

et nous allons démontrer que $m - n\alpha$ peut représenter un nombre réel quelconque et avec une approximation que nous fixerons. Cette proposition est l'un des résultats d'une importante théorie, due à M. Tchebicheff, et exposée par lui dans un beau et savant travail publié en langue russe dans les Mémoires de St. Pétersbourg. La méthode suivante que nous allons employer pour y parvenir est entièrement élémentaire (Voir Journal de Borchardt, tome LXXXVIII, 1879).

Soient $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$ deux réduites consécutives du développement en fraction continue de α ; posons :

$$\alpha n = N + \omega,$$
$$\alpha n' = N' + \omega',$$

en désignant par N, N' deux nombres entiers, par ω et ω' des quantités inférieures en valeur absolue à $\frac{1}{2}$. Soit encore pour abréger :

$$\varepsilon = mn' - m'n = \pm 1 ;$$

nous considérerons les deux entiers x, y donnés par les formules :

$$\varepsilon x = mN' - m'N,$$
$$\varepsilon y = nN' - n'N.$$

On en conclut facilement :

$$\begin{aligned}\varepsilon(x - \alpha y) &= (m - \alpha n)N' - (m' - \alpha n')N \\ &= (m - \alpha n)(\alpha n' - \omega') - (m' - \alpha n')(\alpha n - \omega) \\ &= \varepsilon\alpha + \omega(m' - \alpha n') - \omega'(m - \alpha n),\end{aligned}$$

et par suite :

$$\varepsilon(x - \alpha y - \alpha) = \omega(m' - \alpha n') - \omega'(m - \alpha n).$$

Cela posé, soit λ le quotient complet correspondant à la réduite $\frac{m'}{n'}$; nous aurons comme on sait :

$$a = \frac{m + \lambda m'}{n + \lambda n'},$$

d'où

$$m - an = \frac{\varepsilon\lambda}{n+\lambda n'}, \qquad m' - an' = -\frac{\varepsilon}{n+\lambda n'},$$

et par suite :

$$\omega(m' - an') - \omega'(m - an) = -\varepsilon\frac{\omega + \lambda\omega'}{n + \lambda n'}.$$

De là résulte l'expression :

$$x - ay - \alpha = -\frac{\omega + \lambda\omega'}{n + \lambda n'};$$

et comme ω et ω' sont moindres que $\frac{1}{2}$, on en conclut pour limite supérieure la quantité $\frac{1}{2}\frac{\lambda+1}{n+\lambda n'}$. Or il suffit de l'écrire ainsi : $\frac{1}{2n'}\left(1 + \frac{n'-n}{n+\lambda n'}\right)$, pour voir immédiatement qu'elle décroît lorsque λ augmente, puisque $n' > n$. Son maximum a donc lieu pour $\lambda = 1$. Nous pouvons poser :

$$x - ay - \alpha = \frac{\theta}{n+n'},$$

en désignant par θ un nombre inférieure en valeur absolue à l'unité, n et n' augmentant au-delà de toute limite, il est ainsi démontré qu'on peut trouver deux entiers x et y tels que la quantité $x - ay$ diffère aussi peu qu'on le veut du nombre donné à l'avance α.

Nous donnerons en dernier lieu la limite supérieure du nombre y qui a été obtenue par M^r^ Tchebicheff. Ayant en effet :

$$\varepsilon y = nN' - n'N = n(\alpha n' - \omega') - n'(\alpha n - \omega),$$

ou simplement :

$$\varepsilon y = \omega n' - \omega' n;$$

on voit que cet entier y est renfermé entre $+\frac{n+n'}{2}$ et $-\frac{n+n'}{2}$.

Les expressions de x et y conduisent facilement à une autre conséquence qu'il n'est pas inutile de remarquer. Supposons qu'on ait : $g - ah - \alpha = 0$, g et h étant entiers, je dis qu'à partir d'une certaine réduite du développement de a en fraction continue, et pour toutes celles qui suivent, on trouvera constamment : $x = g$, $y = h$. Nous avons, en effet, par la théorie des fractions continues :

$$a = \frac{m}{n} + \frac{\theta}{nn'}, \qquad a = \frac{m'}{n'} + \frac{\theta'}{n'n''},$$

θ et θ' étant des quantités moindres que l'unité en valeur absolue.

Par suite, puisque $\alpha = g - ah$, il vient :

$$\alpha' n = ng - h\left(m + \frac{\theta}{n'}\right),$$
$$\alpha n = n'g - h\left(m' + \frac{\theta'}{n''}\right),$$

N et N' sont donc les entiers les plus voisins des quantités $ng - h\left(m + \frac{\theta}{n'}\right)$ et $n'g - h\left(m' + \frac{\theta'}{n''}\right)$; or la condition que ω et ω' soient $< \frac{1}{2}$ en valeur absolue montre qu'à partir d'une valeur de n plus

grande que $2h$, on aura :

$$N = ng - mh ,$$
$$N' = n'g - m'h .$$

Or, en calculant x et y par les formules :

$$\varepsilon x = mN' - m'N ,$$
$$\varepsilon y = nN' - n'N ,$$

on trouve : $x = g , \quad y = h ;$

c'est le résultat que nous voulions obtenir.

Supposons que la quantité a satisfasse à une équation du second degré à coefficients entiers $g - ah - a^2 = 0$, on pourra, au moyen de son développement en fraction continue obtenir les entiers g et h, et déterminer ainsi les diviseurs des équations algébriques de la forme $x^2 + px + q$, p et q étant entiers. On sait d'ailleurs qu'une autre méthode pour arriver à ce même but est fondée sur la périodicité de la fraction continue qui représente a.

Soit maintenant :

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} + \frac{a^2}{z^2+a^2} + \frac{1}{z-p} + \frac{b}{z-q} ;$$

a et b étant réels et incommensurables, l'expression générale de $\Phi(z)$ devient :

$$J + \pi (m - na) + 2i\pi (m' - bn') ;$$

d'après ce que nous venons de voir, on peut prendre les entiers m, n, m', n', tels que $\Phi(z)$ diffère aussi peu qu'on le veut d'un nombre donné quelconque $\alpha + i\alpha'$. $\Phi(z)$ est donc absolument indéterminé.

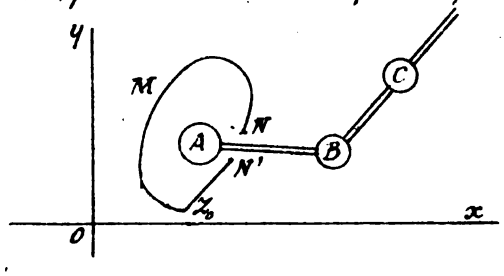
Les considérations que nous venons de développer montrent qu'en général la fonction $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ exige pour sa détermination qu'on se donne le chemin suivi de la limite inférieure z_0 à la limite supérieure z, et c'est à ce résultat qu'on s'est longtemps arrêté. Il était réservé à Riemann d'accomplir un grand progrès en substituant à cette notion analytique, une nouvelle conception qui conduit à des fonctions uniformes, mais affectées de coupures.

Supposons, par exemple, que la fonction $f(z)$ ait trois pôles a, b, c, auxquels correspondent les résidus A, B, C.

Soit $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$, et J la valeur de cette intégrale prise le long de la droite $z_0 z$, la formule qui donne toutes les valeurs de $\Phi(z)$ est :

$$\Phi(z) = J + 2i\pi (mA + nB + pC) ,$$

m, n, p étant des entiers quelconques.



Entourons chaque pôle d'un contour infiniment petit, la fonction uniforme $f(z)$ sera finie et continue dans toute la partie du plan en dehors des aires limitées par ces contours.

Relions maintenant ces contours par des coupures formées de deux lignes infiniment voisines, l'une allant

de A à B, l'autre de B à C et la dernière de C à l'infini.

Si nous interdisons à z l'espace limité par les coupures et les contours, la fonction $\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ sera évidemment finie, continue et uniforme, puisque dans cette partie du plan $f(z)$ est holomorphe, et qu'on ne peut trouver aucun contour fermé qui comprenne un point de discontinuité de $f(z)$. Quant aux lignes de jonction AB, BC, ... qui sont entièrement arbitraires, nous allons faire voir que ce sont des lignes de discontinuité, ayant le caractère analytique de coupures.

Soient N, N', deux points infiniment voisins situés de part et d'autre de la coupure AB, par exemple. Allons de Z_0 en N et N' par les chemins Z_0N', Z_0MN, qui ne rencontrent pas la partie du plan limitée par les contours et les coupures, on a :

$$\Phi(N)=(Z_0MN) \quad ; \quad \Phi(N')=(Z_0N');$$

d'où :

$$\Phi(N)-\Phi(N')=(N'Z_0MN).$$

Si nous ajoutons l'élément infiniment petit (NN'), on voit que $\Phi(N)-\Phi(N')$ est l'intégrale de $f(z)$ prise le long d'un contour fermé comprenant le pôle A et décrit dans le sens négatif ; c'est donc $-2i\pi A$.

La variation de la fonction $\Phi(z)$ aux deux bords de la première coupure est donc $-2i\pi A$; aux deux bords de la seconde, ce sera $-2i\pi(A+B)$; on continuerait ainsi de proche en proche, quel que soit le nombre des pôles, et aux bords de la dernière coupure, on aura $-2i\pi\Sigma A$, ΣA désignant la somme de tous les résidus, c'est-à-dire le résidu intégral de $f(z)$. En admettant la condition $\Sigma A=0$, la dernière coupure peut être supprimée, comme n'étant plus une ligne de discontinuité, et en général si une somme, $A+B$ par exemple, est nulle, la coupure correspondante, ici la deuxième, doit être omise.

Enfin, si tous les résidus sont nuls, toutes les coupures disparaissent ; dans ce cas, en effet, l'intégrale de $f(z)dz$ étant algébrique et rationnelle, n'est susceptible en chaque point que d'une seule valeur.

Telle est, en quelques mots, la conception de Riemann, qui permet de ramener les intégrales des fonctions multiformes aux fonctions uniformes elles-mêmes.

L'illustre géomètre a été plus loin ; il a réussi à transformer la fonction à deux déterminations distinctes, représentée par un radical carré en une fonction uniforme, mais affectée de coupures. Soit, par exemple :

$$F(z)=(z-a)(z-b)\ldots\ldots\ldots(z-l),$$

les quantités $a, b \ldots\ldots l$ étant inégales.

Soit :

$$f(z)=\frac{F'(z)}{F(z)} \quad \text{et} \quad \Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

et formons les coupures de $\Phi(z)$. Les résidus $\frac{F'(z)}{F(z)}$ étant tous égaux à l'unité, la variation de $\Phi(z)$ aux deux bords de la première coupure sera : $-2i\pi$; de la seconde coupure, $-4i\pi$; de la

troisième, $-6i\pi$; et ainsi de suite :

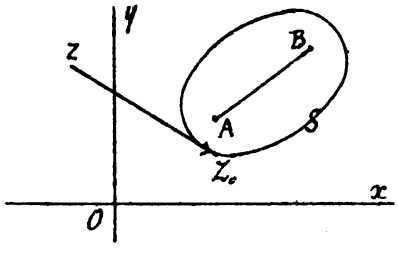
Posons maintenant :

$$\varphi(z) = e^{\frac{1}{2}\Phi(z)}.$$

Nous obtenons ainsi une fonction uniforme, qui au signe près représente $\sqrt{\frac{F(z)}{F(z_0)}}$. On voit immédiatement qu'aux deux bords de la première coupure $\frac{\varphi(N)}{\varphi(N')} = -1$; aux deux bords de la seconde ce rapport est $+1$, et il en est de même pour toutes les coupures de rang pair, tandis qu'il est -1 pour les coupures de rang impair. En supprimant les coupures de rang pair qui ne sont pas pour $\varphi(z)$ des lignes de discontinuité, on obtient donc une fonction à sens unique $\varphi(z)$, qui change de signe en traversant les coupures de rang impair de $\Phi(z)$, et l'on a par suite transformé le radical carré $\sqrt{\frac{F(z)}{F(z_0)}}$ en une fonction uniforme.

Remarquons que la dernière coupure, celle qui s'étend à l'infini n'existe que si le degré de $F(z)$ est impair.

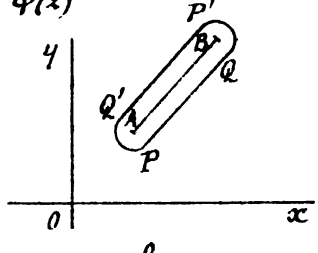
Comme exemple des avantages d'une pareille transformation, nous considérerons l'intégrale $\int_{z_0}^{z} \frac{F(z)\,dz}{\varphi(z)}$, $F(z)$ étant une fonction uniforme quelconque et $\varphi(z)$ représentant le radical $\sqrt{(z-a)(z-b)}$.



Soient Z_0, Z, A, B, les points qui ont pour affixes les quantités z_0, z, a, b ; la fonction $\varphi(z)$ est une fonction uniforme qui admet pour coupure la droite AB.

Ceci posé, on peut aller du point Z_0 au point Z, par un chemin qui ne comprenne pas la coupure AB ; quel que soit ce chemin, l'intégrale a une seule et même valeur J, qu'on obtient, par exemple, en décrivant la droite $Z_0 Z$.

On peut aussi décrire une courbe fermée S partant du point Z_0 et entourant la coupure AB, et ensuite la droite $Z_0 Z$; l'intégrale a alors pour valeur $J + S$, (S) désignant $\int_{(S)} \frac{F(z)\,dz}{\varphi(z)}$, et si on décrit la courbe S n fois, dans le sens positif ou négatif, la valeur générale de l'intégrale sera $J + n(S)$, n étant un entier positif ou négatif.



Pour calculer (S), on peut substituer au contour S un chemin quelconque entourant la coupure AB ; nous choisirons un chemin composé de deux parallèles à AB infiniment voisines PQ, $P'Q'$ et de deux demi-cercles infiniment petits PQ', $P'Q$ qui ont pour centres les points A et B.

En négligeant alors les termes infiniment petits fournis par l'intégration le long des demi-circonférences, il vient :

$$(S) = (PQ) + (P'Q');$$

Or

$$(PQ) = \int_a^b \frac{F(x)\,dx}{\varphi(x)},$$

$$(P'Q') = \int_b^a -\frac{F(x)\,dx}{\varphi(x)};$$

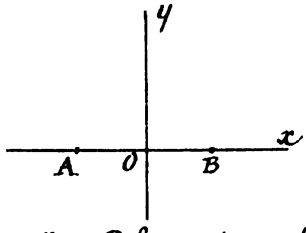
puisqu'aux deux bords de la coupure $\varphi(z)$ change de signe. Nous obtenons donc :

$$(5) = 2\int_a^b \frac{F(z)}{\varphi(z)}\,dz,$$

et la valeur générale de l'intégrale cherchée est par suite :

$$J + 2n\int_a^b \frac{F(z)}{\varphi(z)}\,dz.$$

Nous appliquerons ce résultat à la recherche de l'intégrale $J = \int_{-1}^{+1} \frac{F'(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$, $F'(z)$ étant un polynôme entier.



Si A et B sont les points $z=1$ et $z=-1$, $2J$ sera, d'après ce que nous venons de voir, l'intégrale prise le long d'un contour quelconque comprenant AB. Or $F(z)$ est un polynôme entier; on peut donc agrandir ce contour indéfiniment, et prendre un cercle dont le centre soit à l'origine, et dont le rayon R soit infiniment grand, en posant : $z = Re^{it}$. Cela posé, employons la série :

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{iz}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{iz}\sum_0^\infty \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots\ldots 2n}\,\frac{1}{z^{2n}};$$

en la multipliant par $F(z)$, on en conclut une expression assimilable à une fonction qui admettrait comme seul pôle $z=0$. Désignant donc par A le coefficient de $\frac{1}{z}$, c'est-à-dire le résidu correspondant au pôle $z=0$, on a : $2J = 2i\pi A$, ou $J = i\pi A$. C'est ce qu'on voit d'ailleurs en intégrant chaque terme de la série; les intégrales ainsi obtenues étant toutes nulles, sauf celle qui correspond au terme $\frac{A}{z}$.

Soit en particulier $F'(z) = z^{2n}$, il vient immédiatement :

$$J = \pi\,\frac{1.3.5.\ldots\ldots 2n-1}{2.4.6.\ldots\ldots 2n},$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^1 \frac{z^{2n}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = \frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.5.\ldots\ldots 2n-1}{2.4.6.\ldots\ldots 2n};$$

c'est une formule que nous avons déjà rencontrée.

Soit encore :

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(a-z)\sqrt{1-z^2}};$$

nous remarquerons d'abord que l'intégrale prise le long d'un cercle dont le centre est à l'origine et dont le rayon R est infiniment grand, est nulle; car en développant en série suivant les puissances descendantes de z la fonction sous le signe $\int$ le coefficient de $\frac{1}{z}$ est zéro; d'autre part, elle s'exprime par la quantité $2J$, augmentée de l'intégrale prise le long d'un contour infiniment petit entourant le point A, dont l'affixe est a.

Or, à l'égard de ce contour, on peut traiter $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ comme une fonction uniforme,

ce qui donne immédiatement :

$$\int_A \frac{dz}{(a-z)\sqrt{1-z^2}} = \frac{2i\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

et l'on en conclut qu'en déterminant convenablement le signe du radical carré, on a :

$$J = \frac{i\pi}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Soit pour cela : $a = \alpha + i\beta$; nous trouverons :

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(\alpha+i\beta-z)\sqrt{1-z^2}} = \int_{-1}^{+1} \frac{(\alpha-z)\,dz}{[(\alpha-z)^2+\beta^2]\sqrt{1-z^2}} - i\beta \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{[(\alpha-z)^2+\beta^2]\sqrt{1-z^2}};$$

d'autre part, si l'on pose :

$$\sqrt{a^2-1} = A + iB,$$

on obtient :

$$J = \frac{\pi}{A+iB} = \pi \frac{A-iB}{A^2+B^2};$$

Le signe de la racine carrée est donc fixé par la condition que B soit du signe de β ; ou, ce qui revient au même, A du signe de α ; la relation :

$$\sqrt{(\alpha+i\beta)^2-1} = A + iB,$$

donnant, comme il est aisé de voir :

$$\alpha\beta = AB.$$

XXI^ème Leçon.

Nous avons vu, d'après Riemann, comment il est possible de transformer la fonction non uniforme représentée par un radical du second degré, par exemple, en une fonction uniforme, affectée de coupures. Cette conception nous a conduits en même temps à la détermination des valeurs en nombre infini des intégrales de la forme $\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$, f désignant une fonction rationnelle, et y un radical du second degré, portant sur une fonction de x.

Nous allons arriver à ce même résultat par une autre méthode et en ayant principalement en vue l'intégrale elliptique de première espèce :

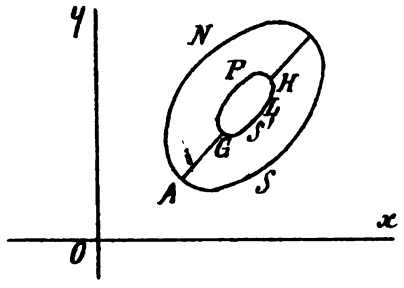
$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad \text{où} \quad R(z) = (1-z^2)(1-k^2z^2);$$

k désignant un nombre plus petit que l'unité. Mais auparavant, nous allons démontrer un théorème fondamental, d'une grande généralité, donné pour la première fois par M. Puiseux dans

son mémoire sur les fonctions algébriques.

On sait qu'en désignant par $f(z)$ une fonction uniforme, l'intégrale $\int f(z)dz$, prise successivement le long de deux contours fermés S et S', décrits en entier et une seule fois dans le sens direct, S' étant intérieur à S, conserve la même valeur sous la condition qu'à l'intérieur de l'aire limitée par ces deux contours, la fonction $f(z)$ n'ait aucune discontinuité.

Supposons maintenant que $f(z)$ se présente sous la forme $\frac{F(z)}{\sqrt{F_1(z)}}$, $F(z)$ et $F_1(z)$ désignant deux fonctions uniformes ; admettons de plus qu'à l'intérieur du plus petit contour S', il y ait un nombre impair de points critiques de $\sqrt{F_1(z)}$, la fonction $f(z)$ n'ayant d'ailleurs, comme dans le cas précédent, aucune discontinuité à l'intérieur de l'aire limitée par S et S'.



Nous allons faire voir que dans ce cas l'intégrale $\int f(z)dz$ n'a point la même valeur si on la prend le long de S, ou le long de S'.

Représentons, comme précédemment, l'intégrale effectuée suivant un certain chemin par l'indication de ce chemin entre parenthèses. Nous aurons :

$$(S) = (AMK) + (KNA)$$
$$(AMK) = (AG) + (GLH) + (HK)$$
$$(KNA) = (KH) + (HPG) + (GA)$$
$$(S') = (GLH + (HPG),$$

et l'on en conclut la relation :

$$(S) = (S') + (HK) + (KH) + (AG) + (GA).$$

Or, on a $(HK) + (KH) = 0$, car le long du chemin HK, $f(z)$ reprend les mêmes valeurs lorsqu'on le suit dans les deux sens. Mais il n'en est pas de même à l'égard de AG ; en revenant en effet au point G, après avoir décrit un contour comprenant un nombre impair de points critiques, on sait que $f(z)$ a acquis une valeur égale et de signe contraire à celle qu'elle avait d'abord. De là résulte que l'on doit écrire :

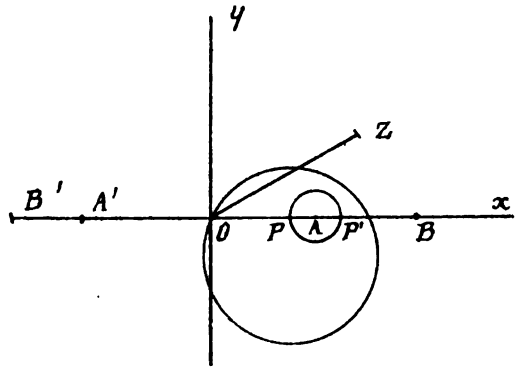
$$(GA) = (AG)$$

et nous obtenons par suite : $(S) = (S') + 2(AG)$. Les deux intégrales désignées par (S) et (S') ont donc en général des valeurs différentes ; elles ne sont égales qu'en supposant $(AG) = 0$ ce qui a lieu si les deux contours S et S' ont un point commun.

Ajoutons, d'ailleurs, que si les points critiques de $f(z)$ à l'intérieur de S', sont en nombre pair, cette fonction pourra être assimilée le long des contours d'intégration à une fonction uniforme, et l'on aura alors : $(S) = (S')$.

Ceci posé, nous allons rechercher, à l'aide des considérations précédentes, les déterminations multiples de l'intégrale $\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$.

Tout d'abord, nous observerons que $R(x)$ étant égal à $(1-x^2)(1-k^2x^2)$, la fonction $f(z)$



admet quatre points critiques A, A', B, B', situés sur l'axe Ox, et dont les affixes sont ± 1, $\pm \frac{1}{K}$.

Décrivons maintenant un contour fermé partant de l'origine en comprenant le seul point critique A, puis la droite Oz, et cherchons la valeur de l'intégrale prise le long de ce chemin.

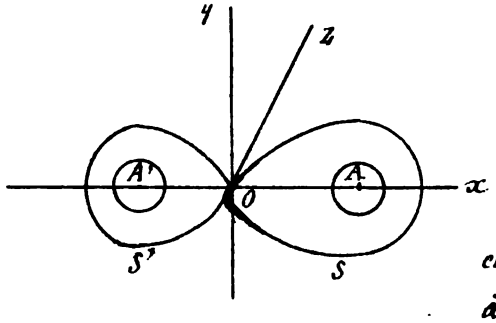
En considérant d'abord le contour fermé, nous décrirons un cercle PP', de rayon ρ infiniment petit, dont le centre soit en A, et nous envisagerons le chemin formé de la droite OP, du cercle $PP'P$, et de la droite PO. L'intégrale prise le long de ce chemin, auquel MM. Briot et Bouquet donnent d'après Clebsh le nom de lacet, est égale à celle dont nous cherchons la valeur, puisque les deux contours d'intégration ont un point commun O.

Cela étant, l'intégrale prise le long du cercle $PP'P$ s'obtient facilement en posant : $z = 1 + \rho e^{it}$; l'expression à laquelle on est ainsi conduit :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\rho}\, e^{\frac{it}{2}}\, dt}{\sqrt{(2+\rho e^{it})\,[1-k^2(1+\rho e^{it})^2]}},$$

est infiniment petite avec ρ. Nous avons ensuite : $(OP) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ en convenant de prendre $+1$ pour la valeur du radical à l'origine, et comme après avoir décrit le cercle $PP'P$, $f(z)$ a changé de signe, on voit qu'il faut supposer $(PO) = (OP)$. L'intégrale cherchée est donc $2K$, en posant avec Jacobi : $K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$. Désignons enfin par J l'intégrale prise suivant OZ avec la valeur initiale $+1$ du radical. En revenant à l'origine, après avoir décrit le contour précédent, cette valeur initiale devient -1, de sorte que la détermination obtenue pour $\int_0^2 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ est $2K - J$. Et, en général, si l'on décrit le contour fermé qui comprend le seul point critique, A, un nombre pair de fois, on retrouve J, tandis qu'on obtient $2K - J$, si on le décrit un nombre impair de fois.

Prenons maintenant comme contour d'intégration une courbe fermée S, comprenant A, puis une courbe fermée S' comprenant A', et enfin la droite OZ. On aura alors :



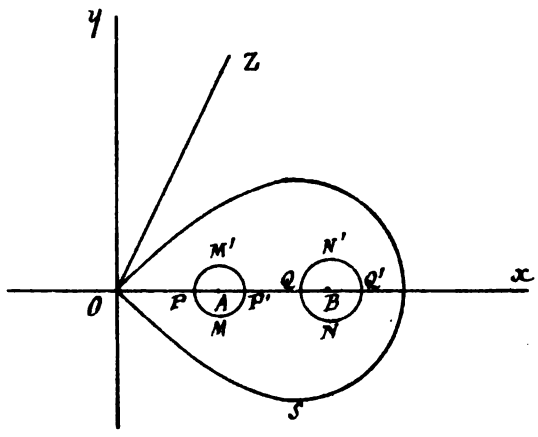
$$(OZ) = J\ ;$$

$$(S) = 2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = 2K$$

$$(S') = 2\int_0^{-1} \frac{dz}{-\sqrt{R(z)}} = 2K,$$

et la détermination ainsi obtenue sera $2\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + J$, c'est-à-dire $4K + J$. Plus généralement, le chemin SS' étant décrit un nombre quelconque de fois dans le sens direct ou indirect, on obtient $4mK + J$, m étant un entier quelconque, positif ou négatif.

En troisième lieu, supposons que le contour d'intégration soit avec la droite OZ, une courbe fermée S comprenant les points A et B. Nous décrirons encore des cercles de rayons



infiniment petits, ayant pour centres les points critiques, et en opérant comme nous venons de le faire, nous aurons :

$$(S)=(OP)+(PMP')+(P'Q)+(QNQ')+(Q'N'Q)+(QP')+(P'N'P)+(PO).$$

On voit immédiatement que cette expression de (S) se réduit à $2(P'Q)=2\int_1^k \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}=2iK'$, en posant avec Jacobi :

$$K'=\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}$$

Et plus généralement en décrivant un nombre quelconque de fois le contour, la détermination obtenue sera $2niK'+J$, n étant un entier positif, un contour semblable comprenant les points A' et B', donnerait la même formule avec des valeurs négatives de n.

Il résulte de ce que nous venons de voir, que quel que soit le chemin suivi par la variable z pour aller de l'origine au point Z, la valeur de l'intégrale $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ est donnée par les formules suivantes :

$$(4m+2)K+2niK'-J$$
$$4mK+2niK'+J,$$

m et n étant des entiers quelconques, positifs, négatifs ou nuls.

Posons maintenant :

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}=x,$$

ou bien l'équation différentielle :

$$\frac{dz}{dx}=\sqrt{R(z)}$$

avec la condition que z et x s'évanouissent en même temps, et soit $z=\varphi(x)$. On voit qu'à une même valeur de z correspondent les expressions : $(4m+2)K+2niK'-x$ et $4mK+2niK'+x$, c'est-à-dire que l'on a les relations :

$$\varphi[(4m+2)K+2niK'-x]=\varphi(x),$$
$$\varphi(4mK+2niK'+x)=\varphi(x).$$

La fonction inverse de l'intégrale elliptique de première espèce a donc pour périodes les deux quantités $4K$ et $2iK'$.

Nous ferons une remarque importante relative à K'. Appelons avec Legendre la constante k le module de l'intégrale, et complément du module une quantité k', satisfaisant à l'égalité :

$$k^2+k'^2=1.$$

Je dis que K' s'exprime en k', de la même manière que K en k.

On a en effet :

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}$$

et si l'on change de variable en faisant :

$$k^2x^2 + k'^2z^2 = 1 ,$$

il vient :
$$K' = \int_1^0 \frac{\frac{k'^2 z\,dz}{-k\sqrt{1-k'^2z^2}}}{\sqrt{k'^2z^2\left(\frac{k'^2(1-z^2)}{k^2}\right)}} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2x^2)}} .$$

C'est le résultat que nous voulions démontrer.

Théorie des Fonctions elliptiques.

L'étude des fonctions circulaires, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, a pour point de départ la définition géométrique de ces quantités, d'où l'on tire en premier lieu leur périodicité, puis la détermination de toutes les solutions réelles des équations : $\sin x = \sin a$, $\cos x = \cos a$, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$, et enfin les formules qui donnent $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$ et $\operatorname{tg}(a+b)$, au moyen des lignes trigonométriques relatives aux deux arcs a et b. Ce sont ces formules qu'on doit regarder comme fondamentales, en raison des nombreuses conséquences auxquelles elles conduisent, et dont les principales sont : le théorème de Moivre, les expressions de $\sin ma$ et $\cos ma$ en fonction de $\sin a$ et $\cos a$, lorsque m est entier, puis l'étude des équations algébriques en $\sin\frac{a}{m}$ et $\cos\frac{a}{m}$, etc.

En joignant à ces résultats les développements en série de $\sin x$ et $\cos x$, les formules d'Euler qui ramènent à la simple exponentielle les fonctions circulaires, on a les points principaux de la théorie des plus simples et en même temps des plus importantes transcendantes de l'Analyse, qui interviennent dans les diverses branches des Mathématiques pures, ainsi que dans toutes les applications du calcul.

Mais de nombreuses et importantes questions conduisent à considérer d'autres fonctions plus générales, les transcendantes elliptiques qui comprennent comme cas particuliers les fonctions circulaires.

Euler, le premier, les a introduites dans l'analyse en généralisant la définition des fonctions circulaires $z = \sin x$, $z = \operatorname{tg} x$, données par les égalités :

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = x, \qquad \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = x$$

de la manière suivante.

Considérons l'intégrale elliptique $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ dont il vient d'être question, et soit $z = \varphi(x)$ la fonction définie en posant $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = x$, ou encore :

$$\varphi'(x) = \sqrt{[1-\varphi^2(x)][1-k^2\varphi^2(x)]}$$

avec la condition $\varphi(0) = 0$; Euler a fait la découverte d'une importance capitale dans l'Analyse de

la formule suivante :

$$\varphi(a+b) = \frac{\varphi(a)\varphi'(b) + \varphi(b)\varphi'(a)}{1 - k^2\varphi^2(a)\varphi^2(b)},$$

et d'autres semblables, concernant les quantités $\sqrt{1-\varphi^2(x)}$, $\sqrt{1-k^2\varphi^2(x)}$. Ce sont ces relations qui ont ouvert à l'égard de la fonction $\varphi(x)$ la voie suivie dans la théorie des fonctions circulaires, où l'on part des formules :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Elle a été parcourue avec le plus grand succès par Abel et Jacobi ; et ce sont leurs découvertes qui, après celles d'Euler, de Lagrange et de Legendre, ont fondé la théorie de ces nouvelles fonctions qu'on nomme les transcendantes elliptiques et dont on voit bien maintenant l'étroite liaison avec les fonctions trigonométriques. La dénomination de transcendantes elliptiques a son origine dans ce fait que la longueur d'un arc d'ellipse dont le grand axe est l'unité, et l'excentricité la constante k, est donnée par l'intégrale de seconde espèce : $\int_0^x \frac{1-k^2x^2}{\sqrt{R(x)}}dx$.

Mais il faut bien se rappeler, comme nous l'avons déjà dit, qu'une fonction définie en posant :

$$\int_0^x \frac{1-k^2x^2}{\sqrt{R(x)}}\,dx = x$$

n'aurait aucune analogie avec $\sin x$, ni aucune propriété simple qui en permettrait l'étude. Ainsi, l'analyse seule, et non la géométrie donne la définition des nouvelles quantités dont nous allons maintenant exposer les propriétés les plus essentielles.

La première de ces propriétés qui est restée ignorée d'Euler, de Lagrange et de Legendre, consiste dans la double périodicité de la fonction $\varphi(x)$, découverte en même temps par Abel et Jacobi, et qui résulte pour nous des déterminations multiples précédemment obtenues pour l'intégrale $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$.

C'est en nous proposant l'étude des fonctions doublement périodiques uniformes, considérées en général, que nous serons amenés par la voie la plus facile aux propriétés des transcendantes elliptiques et de la fonction $\varphi(x)$.

Voici sous ce point de vue une première remarque, due à Jacobi.

Cherchons si une fonction uniforme $F(x)$ peut avoir deux périodes réelles a et b. On aura alors la condition :

$$F(x + ma - nb) = F(x),$$

où m et n sont deux entiers quelconques.

Cela étant, si a et b ont un rapport commensurable, de sorte qu'on puisse poser $a = \omega\mu$, $b = \omega\nu$, μ et ν étant deux entiers premiers entre eux, on voit qu'en déterminant m et n par l'équation $m\mu - n\nu = 1$, les deux périodes a et b se ramèneront à la période unique ω. Mais, en second lieu, supposons $\frac{b}{a}$ une quantité incommensurable ; on peut

prendre m et n tels que $m - \frac{b}{a} n$ diffère aussi peu qu'on le veut d'un nombre donné α ; il en résulte que la fonction $F(x)$ est dans ce cas une constante, puisqu'elle ne change point en ajoutant à la variable la quantité arbitraire αa. Il n'existe, par suite, aucune fonction uniforme admettant deux périodes réelles.

Ceci posé, je dis que si la fonction uniforme $F(x)$ a deux périodes a et b, le rapport $\frac{b}{a}$ est nécessairement imaginaire. Posons, en effet, $F(x) = f(ax)$, $f(ax)$ admet comme périodes 1 et $\frac{b}{a}$, et si $\frac{b}{a}$ n'était pas imaginaire, cette fonction aurait deux périodes réelles, ce qui a été reconnu impossible.

Ce point établi, nous allons montrer qu'il est facile de construire une fonction uniforme admettant pour périodes les quantités a et b dont le rapport est imaginaire. Soit, à cet effet, $\frac{b}{a} = \alpha + i\beta$, en supposant $\beta > 0$, ce qui est toujours possible, car il est permis de changer le signe d'une des périodes. J'introduirai la quantité :

$$Q = e^{i\pi \frac{b}{a}},$$

en observant que le module de Q étant $e^{-\pi\beta}$, où β est positif, sera nécessairement inférieur à l'unité. Cela étant, désignons par j un nombre entier positif quelconque, nous poserons :

$$\Phi(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m Q^{\frac{m^2}{j}} e^{\frac{2mi\pi x}{a}} ;$$

les coefficients A_m étant assujettis à la condition :

$$A_{m+j} = A_m .$$

La fonction $\Phi(x)$ que nous venons de définir admet évidemment la période a. Toutefois, il faut démontrer que la série du second membre est convergente. A cet effet, partageons-la en deux autres ; l'une donnée par les valeurs positives de m, la seconde par les valeurs négatives. La racine m^{e} du terme général de la première série est $\sqrt[m]{A_m}\, Q^{\frac{m}{j}} e^{\frac{2i\pi x}{a}}$, et l'on voit que son module a pour limite zéro, quand m augmente indéfiniment, d'après la condition mod. $Q < 1$.

Cette première série est donc convergente, et le même raisonnement montre immédiatement qu'il en est de même de la seconde.

Soit maintenant :

$$\varphi(x) = e^{\frac{ji\pi x^2}{ab}} ;$$

je dis que le produit $\varphi(x)\,\Phi(x)$, qui a perdu la période a admet la période b. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x)\,\Phi(x) &= \Sigma A_m e^{i\pi \frac{b}{a}\frac{m^2}{j} + 2mi\pi \frac{x}{a} + ji\pi \frac{x^2}{ab}} \\ &= \Sigma A_m e^{\frac{ji\pi}{ab}\left(x + \frac{mb}{j}\right)^2} \\ &= \Sigma A_m \varphi\left(x + \frac{mb}{j}\right). \end{aligned}$$

Or, on peut changer dans le second membre m en $m+j$, attendu que la sommation s'étend à toutes les valeurs de m, de $-\infty$ à $+\infty$; cela étant, la condition $A_{m+j} = A_m$ nous permet d'écrire :

$$\varphi(x)\,\Phi(x) = \Sigma A_m \varphi\left(x + b + \frac{mb}{j}\right);$$

par conséquent $\varphi(x)\,\Phi(x)$ admet bien la période b.

Ce point établi, considérons la fonction $\Pi(x)$ analogue à $\Phi(x)$, mais dans laquelle les

coefficients soient d'autres constantes $B_0, B_1, \ldots\ldots B_{j-1}$, et envisageons le quotient $\frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}$. Les deux termes admettent a pour période, et en les multipliant par le facteur $\varphi(x)$, ils acquièrent la période b. Nous avons donc réalisé par le quotient $\frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}$ une fonction uniforme doublement périodique.

A la vérité, nous n'avons ainsi qu'un cas particulier de ce genre de fonctions; mais ce cas suffit pour nous conduire à leur expression analytique générale, comme nous le montrerons. Nous remarquerons que l'expression que nous avons obtenue renferme les $2j$ constantes arbitraires $A_0, A_1, \ldots\ldots, A_{j-1}$, et $B_0, B_1, \ldots\ldots, B_{j-1}$, ou plutôt seulement leurs rapports à l'une d'elles, au nombre de $2j-1$. Mais il est possible d'introduire une indéterminée de plus, distincte des précédentes, en changeant x en $x+x_0$, où x_0 est arbitraire, de sorte qu'en définitive notre formule a ce degré de généralité de contenir un nombre de constantes indéterminées égal à $2j$.

XXII^ème Leçon.

Nous allons maintenant faire voir comment à l'aide des quantités définies dans la dernière leçon, nous pouvons obtenir l'expression analytique générale des fonctions doublement périodiques uniformes, lorsqu'elles n'ont que des discontinuités polaires. Etablissons d'abord un résultat dont nous nous servirons plus loin. Nous avons vu que le produit $\varphi(x)\Phi(x)$ admet b pour période; on a par suite:

$$\varphi(x+b)\,\Phi(x+b) = \varphi(x)\,\Phi(x),$$

d'où:
$$\Phi(x+b) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+b)}\,\Phi(x);$$

or
$$\varphi(x) = e^{\frac{j i\pi x^2}{ab}}$$

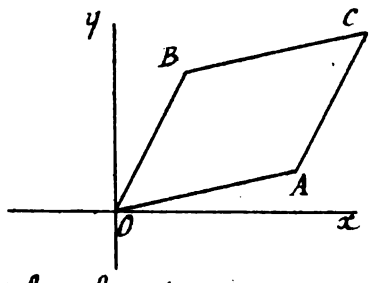
donc:
$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+b)} = e^{\frac{j i\pi}{ab}\left[x^2-(x+b)^2\right]} = e^{\frac{-j i\pi}{a}(2x+b)}.$$

Nous avons ainsi la relation:
$$\Phi(x+b) = e^{\frac{-j i\pi}{a}(2x+b)}\,\Phi(x);$$

et plus généralement, m étant un entier quelconque,
$$\Phi(x+mb) = e^{\frac{-mj i\pi}{a}(2x+mb)}\,\Phi(x).$$

Ceci posé, nous allons chercher le nombre des racines de l'équation: $\Phi(x)=0$, comprises à l'intérieur du contour que nous allons définir, et qui jouera dans la suite un rôle important.

Soient A et B les points dont les affixes sont a et b. Décrivons le parallélogramme



dont deux des côtés sont OA et OB, nous formerons une figure OACB que nous appellerons parallélogramme des périodes.

Il est nécessaire de faire une remarque relativement à cette figure. Nous avons supposé qu'en posant $\frac{b}{a} = \alpha + i\beta$, la quantité β était positive ; il en résulte qu'un rayon vecteur dirigé d'abord suivant Ox, puis tournant dans le sens direct autour de l'origine rencontrera d'abord le point A et ensuite le point B. Soient en effet : λ et μ les angles AOx, BOx ; on a :

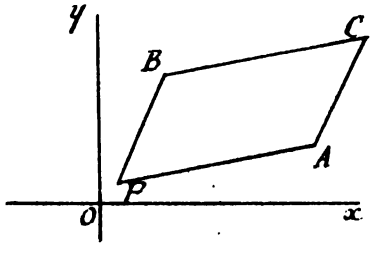
$$a = \text{mod.}\ a \cdot e^{i\lambda}$$

$$b = \text{mod.}\ b \cdot e^{i\mu},$$

d'où :
$$\frac{b}{a} = \text{mod.}\left(\frac{b}{a}\right)\left[\cos(\mu-\lambda) + i\sin(\mu-\lambda)\right];$$

on doit donc supposer $\sin(\mu-\lambda) > 0$, c'est-à-dire que $\mu-\lambda$ est positif, ce qui démontre la proposition. Comme d'ailleurs on peut toujours prendre pour périodes $-a$ et $-b$, sans que leur rapport soit altéré, nous admettrons désormais que le point A soit situé au-dessus de Ox, pour la plus grande clarté des figures.

Plus généralement, soit P un point quelconque du plan. Menons par ce point deux droites PA, PB égales et parallèles aux droites OA, OB de la figure précédente ; puis, achevons le parallélogramme PACB, qui a pour côtés PA et PB ; nous formons une figure que nous appellerons de même parallélogramme des périodes.



Voici maintenant comment s'obtient le nombre μ des racines de l'équation $\Phi(x) = 0$, comprises à l'intérieur de ce contour.

Nous partirons de l'expression donnée par le théorème de Cauchy, à savoir :

$$\mu = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\,dz,$$

l'intégrale étant prise en suivant le chemin PACB.

Soit p l'affixe du point P ; les côtés PA, PB, AC, BC du parallélogramme seront respectivement représentés par les équations :

$$z = p + at,$$
$$z = p + bt,$$
$$z = p + a + bt,$$
$$z = p + b + at,$$

où t est une variable réelle que nous ferons croître de 0 à 1.

Posons pour un moment, afin d'abréger l'écriture : $\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = f(z)$, et désignons toujours l'intégrale d'une fonction prise en suivant un certain chemin par l'indication de ce chemin entre parenthèses ; il vient alors :

$$2i\pi\mu = (PA) + (AC) - (BC) - (PB),$$

et l'on a :

$$(PA)-(BC)=a\int_0^1[f(p+at)-f(p+b+at)]dt$$

et
$$(AC)-(PB)=b\int_0^1[f(p+a+bt)-f(p+bt)]dt.$$

Or, $\Phi(z)$ admettant la période a, il en est de même de $f(z)$, et l'on en conclut :

$$(AC)-(PB)=0.$$

Employons ensuite la relation :

$$\Phi(z+b)=e^{\frac{-j i\pi}{a}(2z+b)}\Phi(z),$$

on en tire en prenant la dérivée logarithmique des deux membres :

$$f(z+b)=f(z)-\frac{2ji\pi}{a}.$$

Nous avons donc :
$$f(p+at)-f(p+b+at)=\frac{2ji\pi}{a}$$

et par conséquent :
$$(PA)-(BC)=2ji\pi\,;$$

ce qui nous donne :
$$\mu=j.$$

L'équation $\Phi(z)=0$ a ainsi j racines à l'intérieur du parallélogramme des périodes.

Dans le cas le plus simple, où $j=1$, la fonction $\Phi(x)$ admet une racine et une seule dans ce contour. Les coefficients A_m se réduisent alors à A_0, que nous supposerons égal à l'unité, et nous appellerons désormais $\chi(x)$ la fonction définie par la série :

$$\chi(x)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}Q^{m^2}e^{\frac{2mi\pi x}{a}}.$$

C'est à l'aide de cette fonction remarquable que nous allons obtenir avec la plus grande facilité l'expression analytique générale des fonctions doublement périodiques uniformes qui n'ont que des discontinuités polaires. Plus tard nous nous occuperons des fonctions doublement périodiques uniformes qui admettent des points essentiels.

Remarquons, en premier lieu, qu'à l'intérieur du parallélogramme ayant l'origine comme sommet, la racine unique de l'équation $\chi(x)=0$ est à l'intersection des diagonales, c'est-à-dire que son affixe est $\frac{a+b}{2}$. Ce résultat se présentera plus tard de lui-même ; mais il est facile de le vérifier dès maintenant.

On a en effet $\chi\left(\frac{a+b}{2}\right)=\Sigma(-1)^m Q^{m^2+m}$;

à la place de m, mettons $-1-m'$; comme la sommation s'étend de $m=-\infty$ à $m=+\infty$, le résultat ne changera pas, et l'on obtient ainsi :

$$\Sigma(-1)^m Q^{m^2+m}=-\Sigma(-1)^{m'}Q^{m'^2+m'}.$$

La série étant à la fois égale et de signe contraire à elle-même, est nécessairement égale à zéro, et il est ainsi démontré que $\chi(x)$ s'annule pour $x=\frac{a+b}{2}$ comme nous voulions l'établir.

Ajoutons qu'en alternant les signes dans $\chi(x)$, on obtient la série $\Theta(x)$ de Jacobi, par laquelle bientôt nous exprimerons la fonction inverse de l'intégrale elliptique, et qui joue un rôle considérable dans l'Analyse.

La transcendante de Jacobi s'était d'ailleurs déjà rencontrée dans les travaux de Fourier sur la théorie de la chaleur, comme M. Rosenham en a fait la remarque. Cet exemple montre avec bien d'autres la concordance des recherches de l'Analyse abstraite avec les applications du Calcul aux questions physiques. Les travaux des géomètres sous ces points de vue si différents

sont, en effet, si étroitement liés qu'ils se rencontrent, malgré la diversité de leurs buts, dans les mêmes théories analytiques.

Arrivons maintenant à notre objet principal, qui est de donner l'expression analytique générale des fonctions uniformes aux périodes a et b, lorsqu'elles admettent seulement des discontinuités polaires.

Soit $c = \frac{a+b}{2}$, et posons :

$$Z(x-c) = \frac{\chi'(x)}{\chi(x)}$$

ou bien :

$$Z(x) = \frac{\chi'(x+c)}{\chi(x+c)};$$

$Z(x)$ est ainsi une fonction uniforme, qui a la période a.

D'autre part, on a, comme nous l'avons déjà vu :

$$Z(x+b) = Z(x) - \frac{2i\pi}{a};$$

$Z(x+b)$ ne différant de $Z(x)$ que par une constante, on en conclut : $Z'(x+b) = Z'(x)$, $Z''(x+b) = Z''(x)$, ..., de sorte que les dérivées de la fonction $Z(x)$ admettent les deux périodes a et b.

Ceci posé, soit $F(x)$ une fonction uniforme aux périodes a et b, et qui à l'intérieur du parallélogramme des périodes $PABC$, n'a pas d'autres discontinuités que des pôles. En désignant par x l'affixe d'une variable qui reste à l'intérieur de ce parallélogramme, nous emploierons la fonction suivante :

$$f(z) = F(z)\,Z(x-z).$$

Elle admet évidemment la période a, et si on change z en $z+b$ il vient :

$$f(z+b) = f(z) + \frac{2i\pi}{a} F(z)$$

d'après la relation :

$$Z(x-z-b) = Z(x-z) + \frac{2i\pi}{a}.$$

Considérons maintenant l'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise le long du contour $PACB$; en opérant comme précédemment, et tenant compte de la période et de la relation précédente, nous trouverons facilement :

$$(PACB) = a\int_0^1 -\frac{2i\pi}{a} F(p+at)\,dt = -2i\pi\int_0^1 F(p+at)\,dt.$$

D'autre part, cette intégrale a pour valeur le produit de $2i\pi$ par la somme S des résidus de $f(z)$ relatifs aux pôles de cette fonction situés à l'intérieur du contour ; on a donc l'expression suivante :

$$S = -\int_0^1 F(p+at)\,dt,$$

où il importe de remarquer que le second membre est indépendant de x.

Calculons maintenant les résidus de $f(z)$.

Dans le parallélogramme $PABC$, $f(z)$ a tous les pôles de $F(z)$ et $Z(x-z)$ situés à l'intérieur de ce même contour. Or $Z(x-z)$ admet le pôle $z=x$, et le résidu correspondant est $-F(x)$, car on a sensiblement dans le voisinage de $x=0$, $Z(x) = \frac{1}{x}$, et par conséquent :

$$Z(x-z) = -\frac{1}{z-x}.$$

Soit, en second lieu, α un quelconque des pôles de $F(x)$; pour obtenir le résidu correspondant, faisons $z = \alpha + h$, et développons $F(z)$ suivant les puissances de h. La partie principale, c'est-à-dire celle qui contient en dénominateur les puissances de h pourra se mettre sous la forme:

$$\frac{A}{h} + A_1 D_h\left(\frac{1}{h}\right) + A_2 D_h^2\left(\frac{1}{h}\right) + \ldots\ldots\ldots + A_n D_h^n\left(\frac{1}{h}\right),$$

ou bien:

$$\frac{A}{h} - A_1 \frac{1}{h^2} + A_2 \frac{1.2}{h^3} - \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n A_n \frac{1.2\ldots\ldots n}{h^n}.$$

On a d'ailleurs:

$$Z(x-\alpha-h) = Z(x-\alpha) - \frac{h}{1} Z'(x-\alpha) + \ldots\ldots + (-1)^i \frac{h^i}{1.2\ldots\ldots i} Z^{(i)}(x-\alpha) + \ldots;$$

le résidu cherché, c'est-à-dire le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de $F(\alpha+h) Z(x-\alpha-h)$ est par conséquent :

$$A Z(x-\alpha) + A_1 Z'(x-\alpha) + \ldots\ldots\ldots + A_n Z^{(n)}(x-\alpha).$$

En écrivant donc que S est une constante C indépendante de x, nous obtenons la formule:

$$F(x) = C + \Sigma\left[A Z(x-\alpha) + A_1 Z'(x-\alpha) + \ldots\ldots + A_n Z^{(n)}(x-\alpha)\right],$$

où la sommation s'étend à tous les pôles de $F(x)$ situés à l'intérieur du parallélogramme des périodes.

C'est là l'expression analytique générale des fonctions uniformes admettant les deux périodes a et b, et qui n'ont que des discontinuités polaires.

Cette expression, qui offre la plus complète analogie avec celle des fractions rationnelles décomposées en fractions simples, est d'un continuel usage dans la théorie des fonctions elliptiques. Voici les premières conséquences que nous allons en tirer.

En premier lieu, il n'existe pas de fonction doublement périodique holomorphe ; une pareille fonction ne serait en effet qu'un cas particulier de la fonction $F(x)$ que nous venons d'envisager, et comme tous les coefficients A, A_1, $\ldots\ldots$ seraient nuls, on aurait : $F(x) = C$; c'est-à-dire que dans l'hypothèse admise, la fonction se réduit à une constante. En second lieu, il n'existe pas de fonction uniforme doublement périodique ayant un seul et unique pôle simple à l'intérieur du parallélogramme des périodes.

Remarquons d'abord, à cet effet, qu'en changeant x en $x+b$ dans l'expression de F, il vient immédiatement :

$$F(x+b) = F(x) - \frac{2i\pi}{a} \Sigma A,$$

car les fonctions $Z'(x)$, $Z''(x)$, $\ldots\ldots$ admettent toutes la période b. Comme d'ailleurs par hypothèse : $F(x+b) = F(x)$, on en conclut la relation $\Sigma A = 0$.

C'est là une propriété d'une grande importance et d'un emploi continuel. Nous en tirerons en ce moment cette conséquence que le résidu A d'une fonction doublement périodique à pôle unique est nécessairement nul, et par suite, si ce pôle est simple, notre formule montre que la fonction n'est encore qu'une constante.

Il est donc nécessaire d'admettre que la fonction doublement périodique $F(x)$ ait au

moins deux pôles simples ou un pôle double. C'est le premier de ces cas particuliers qui nous donnera plus tard les fonctions inverses des intégrales elliptiques.

L'expression générale des fonctions doublement périodiques par une somme d'éléments simples, conduit à une autre expression de ces fonctions que nous allons établir. A cet effet, nous décomposerons en éléments simples la dérivée logarithmique $\frac{F'(x)}{F(x)}$ d'une fonction doublement périodique quelconque. Voici le résultat important auquel on se trouve alors conduit. Soit à l'intérieur du parallélogramme des périodes $p_1, p_2, \ldots p_m$, les pôles de $F(x)$ et $q_1, q_2, \ldots q_n$ les zéros ; nous supposerons pour plus de simplicité que ces zéros et ces pôles sont du premier ordre ; cela étant, la fonction $\frac{F'(x)}{F(x)}$ aura à la fois pour pôles $p_1, p_2, \ldots, p_m$ et $q_1, q_2, \ldots q_n$.

Or les résidus correspondant aux quantités $q_1, q_2, \ldots q_n$, sont tous égaux à l'unité, en effet $F(x)$ étant mis sous la forme du quotient de deux fonctions holomorphes, $\frac{Q}{P}$, on a :

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = D_x \log F(x) = D_x \log Q - D_x \log P.$$

Le résidu relatif à $x = q_1$, par exemple, est donc le même que celui de $D_x \log Q$, puisque q_1 n'annule pas P et a pour valeur l'unité, comme nous l'avons vu à propos du théorème de Cauchy. La même formule montre aussi que les résidus relatifs aux pôles $p_1, p_2, \ldots p_m$ sont tous égaux à -1.

Ceci posé, l'expression générale des fonctions doublement périodiques donne, en désignant par λ une constante :

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \lambda + \Sigma Z(x-q) - \Sigma Z(x-p),$$

en nous rappelant que :

$$Z(x-c) = \frac{\chi'(x)}{\chi(x)} ;$$

on peut donc écrire :

$$D_x \log F(x-c) = \lambda + \Sigma D_x \log \chi(x-q) - \Sigma D_x \log (x-p).$$

Nous avons par suite en intégrant la formule :

$$F(x-c) = e^{\lambda x + \lambda_0} \frac{\chi'(x-q_1)\chi(x-q_2)\ldots\ldots\chi(x-q_n)}{\chi(x-p_1)\chi(x-p_2)\ldots\ldots\chi(x-p_m)},$$

où λ_0 est une nouvelle constante.

On verra facilement que ce résultat subsiste dans le cas où les pôles et les zéros de la fonction $F(x)$ ne sont pas tous du premier ordre ; il suffit, en effet, de supposer que les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_m$; $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ne sont pas toutes distinctes.

Voici deux remarques auxquelles il donne lieu. Je dis d'abord que le nombre des quantités p est égal à celui des quantités q ; en effet $\frac{F'(x)}{F(x)}$ étant doublement périodique, la somme de ses résidus à l'intérieur du parallélogramme des périodes est nulle, d'où la condition $m - n = 0$. Nous démontrerons ensuite un théorème remarquable indiqué pour la première fois par M. Liouville dans ses Leçons au Collège de France, et qui a servi de base aux applications si importantes des

fonctions elliptiques faites par Clebsch à la théorie des cubiques planes, de la quadrique intersection de deux surfaces du second ordre, etc.

Soit :

$$g = p_1 + p_2 + \dots\dots + p_n,$$
$$h = q_1 + q_2 + \dots\dots + q_n;$$

Je dis que l'on a :

$$g - h = mb - m'a,$$

m et m' étant deux nombres entiers.

Posons à cet effet :

$$P(x) = \chi(x-p_1)\,\chi(x-p_2)\dots\dots\chi(x-p_n),$$
$$Q(x) = \chi(x-q_1)\,\chi(x-q_2)\dots\dots\chi(x-q_n);$$

ces fonctions $P(x)$ et $Q(x)$ admettent la période a, et la relation :

$$\chi(z+b) = \chi(z)\, e^{\frac{-i\pi}{a}(2z+b)},$$

donnant par le changement de x en $x+p$:

$$\chi(x+b-p) = \chi(x-p)\, e^{\frac{-i\pi}{a}(2x+b)+\frac{2i\pi p}{a}}.$$

On en conclut facilement celles-ci :

$$P(x+b) = P(x)\, e^{-\frac{ni\pi}{a}(2x+b)+\frac{2i\pi}{a}g},$$

$$Q(x+b) = Q(x)\, e^{-\frac{ni\pi}{a}(2x+b)+\frac{2i\pi}{a}h};$$

puis, en divisant membre à membre :

$$\frac{P(x+b)}{Q(x+b)} = \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{\frac{2i\pi}{a}(g-h)}$$

Cela étant, exprimons que la fonction $F(x-c) = e^{\lambda x+\lambda}\,\frac{Q(x)}{P(x)}$ a la période a, on trouve d'abord la condition $e^{\lambda a} = 1$, d'où $\lambda a = 2mi\pi$, m étant entier. Si l'on exprime ensuite qu'elle a la période b, on obtient :

$$e^{\lambda b+\frac{2i\pi}{a}(h-g)} = 1;$$

nous avons donc en désignant de même par m' un nombre entier :

$$2mi\pi\,\frac{b}{a} + \frac{2i\pi}{a}(h-g) = 2m'i\pi,$$

et par conséquent :

$$g - h = mb - m'a.$$

C'est dans les beaux travaux de Clebsch qu'on verra le rôle important de la relation que nous venons d'établir : en ce moment et pour notre objet, voici la conséquence que nous allons en tirer.

Elle donne, en remarquant que la fonction $\chi(x)$ admet la période a :

$$\chi(x+g) = \chi(x+h+mb)$$
$$= \chi(x+h)\, e^{-\frac{mi\pi}{a}(2x+2h+mb)};$$

on peut donc écrire :

$$e^{\frac{2mi\pi x}{a}} = \mu \frac{\chi(x+h)}{\chi(x+g)},$$

μ étant une constante.

Ceci posé, revenons à la formule :

$$P(x-c) = e^{\lambda x - \lambda_0} \frac{Q(x)}{P(x)},$$

où nous avons trouvé $\lambda = \frac{2mi\pi}{a}$, et remplaçons le facteur exponentiel par $\mu \frac{\chi(x+h)}{\chi(x+g)}$.

On obtiendra ainsi, en négligeant un facteur constant, l'expression :

$$F(x-c) = \frac{Q(x).\chi(x+h)}{P(x).\chi(x+g)},$$

où le numérateur et le dénominateur sont des fonctions de même forme qui doivent appeler notre attention. Envisageons le dénominateur par exemple, $P(x)\chi(x+g)$, que nous désignerons par $\Phi(x)$.

En premier lieu, cette fonction $\Phi(x)$ est holomorphe en admettant la période a ; en changeant ensuite x en $x+b$, les égalités

$$P(x+b) = \chi(x+b+g)\, e^{-\frac{ni\pi}{a}(2x+b)+\frac{2i\pi}{a}g}$$
$$P(x)\, e = \chi(x+g)\, e^{-\frac{i\pi}{a}(2x+b)-\frac{2i\pi}{a}g}$$

nous donnent en multipliant membre à membre :

$$\Phi(x+b) = \Phi(x)\, e^{-\frac{(n+1)i\pi}{a}(2x+b)}.$$

On voit donc que la fonction $\Phi(x)$ jouit des mêmes propriétés fondamentales que la fonction de même nom considérée au commencement de la théorie ; on a en effet, en faisant $j = n+1$:

$$\Phi(x+a) = \Phi(x)$$
$$\Phi(x+b) = \Phi(x)\, e^{-\frac{ji\pi}{a}(2x+b)}.$$

Je dis maintenant qu'elles sont identiques ; je vais démontrer, en effet, que la solution la plus générale du système des deux équations précédentes par une fonction uniforme et holomorphe est précisément l'expression qui a été considérée comme point de départ de la théorie des fonctions à double période.

D'après la formule de Fourier, la fonction la plus générale satisfaisant à la première équation sera d'abord :

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_m\, e^{\frac{2mi\pi x}{a}}.$$

Remplaçons a_m par la quantité $A_m Q^{\frac{m^2}{j}}$, nous aurons :

$$\Phi(x) = \sum^{+\infty} A_m Q^{\frac{m^2}{j}+2m} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}.$$

De là on conclut :

$$\Phi(x+b) = \sum A_m Q^{\frac{m^2}{j}+2m} e^{\frac{2mi\pi x}{a}},$$

et par conséquent :

$$Q(x+b)\, e^{\frac{ji\pi}{a}(2x+b)} = \sum A_m Q^{\frac{m^2}{j}+2m+j} e^{\frac{2(m+j)i\pi x}{a}}$$

Mettons maintenant $m-j$ au lieu de m, ce qui est permis, puisque la sommation s'étend à toutes les valeurs de m depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et remarquons que l'exposant de Q est $\frac{(m+j)^2}{j}$, on conclura de notre seconde relation :

$$\Phi(x) = \Sigma A_{m-j}\, Q^{\frac{m^2}{j}} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}$$

Cette expression, rapprochée de la première, montre que l'on a : $A_m = A_{m-j}$, et par conséquent $A_{m+j} = A_m$. La fonction $\Phi(x)$ ne diffère donc pas de celle que nous avons définie au début de notre étude des fonctions doublement périodiques. Il en résulte que le quotient $\frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}$ donné à priori pour représenter une telle fonction est, comme nous l'avons annoncé, l'expression analytique générale des fonctions uniformes admettant les périodes a et b et n'ayant que des discontinuités polaires.

Remarquons, enfin, que si l'on change x en $x+x_0$, et qu'on multiplie les 2 termes par le facteur $\chi(x-jx_0)$, les produits :

$$\Phi_1(x) = \chi(x-jx_0)\,\Phi(x+x_0) \qquad \text{et} \qquad \Pi_1(x) = \chi(x-jx_0)\,\Pi(x+x_0)$$

vérifient les relations :

$$\Phi_1(x+b) = \Phi_1(x)\, e^{\frac{-(j+1)i\pi}{a}(2x+b)}$$
$$\Pi_1(x+b) = \Pi_1(x)\, e^{\frac{-(j+1)i\pi}{a}(2x+b)}$$

On a ainsi :

$$\frac{\Pi(x+x_0)}{\Phi(x+x_0)} = \frac{\Pi_1(x)}{\Phi_1(x)},$$

de sorte que le changement de x en $x+x_0$ équivaut au changement de j en $j+1$, et n'altère pas la forme analytique de notre expression des fonctions à double période.

XXIII^ème Leçon.

En exposant dans les leçons précédentes les principes de la théorie des fonctions doublement périodiques, nous avons été amené à des expressions analytiques qui représentent un autre genre de transcendantes d'une nature plus générale, et dont nous devons dire quelques mots. Reprenons dans ce but la formule :

$$F(x-c) = e^{\lambda x+\lambda_0}\,\frac{Q(x)}{P(x)},$$

où nous avons supposé

$$P(x) = \chi(x-p_1)\,\chi(x-p_2)\,\ldots\ldots\,\chi(x-p_n),$$
$$Q(x) = \chi(x-q_1)\,\chi(x-q_2)\,\ldots\ldots\,\chi(x-q_n);$$

mais en laissant la constante λ d'une part, les quantités p et q de l'autre, entièrement

arbitraires. Dans ces nouvelles conditions, on aura au lieu de la double périodicité, les relations suivantes :

$$F(x+a) = \mu\, F(x),$$
$$F(x+b) = \mu' F(x),$$

les multiplicateurs constants μ et μ' étant :

$$\mu = e^{\lambda a},$$
$$\mu' = e^{\lambda b - \frac{2i\pi}{a}(g-h)}.$$

De nombreuses et importantes questions d'analyse et de mécanique conduisent à des fonctions ainsi caractérisées, et nous établirons à leur égard les propositions suivantes qui sont une extension facile de celles que nous avons obtenues pour les fonctions doublement périodiques.

Désignons (ce que $F(x)$ en général la dérivée logarithmique $\frac{F'(x)}{F(x)}$ rentre dans la catégorie des fonctions à double période, admettant donc qu'elle n'ait d'autres discontinuités que des pôles, qui seront par suite les pôles et les zéros de $F(x)$, la décomposition en éléments simples nous donnera :

$$\frac{F'(x-c)}{F(x-c)} = \lambda + \Sigma Z(x-q) - \Sigma Z(x-p)$$

Nous conclurons de là l'expression :

$$F(x-c) = e^{\lambda x + \lambda_0} \frac{\chi(x-q_1)\chi(x-q_2)\ldots\chi(x-q_m)}{\chi(x-p_1)\chi(x-p_2)\ldots\chi(x-p_n)};$$

on observera ensuite que le théorème relatif à la somme des résidus de toute fonction doublement périodique, donnant encore la condition $m = n$, on se trouve immédiatement ramené à la formule :

$$F(x-c) = e^{\lambda x + \lambda_0} \frac{Q(x)}{P(x)}.$$

Telle est donc l'expression la plus générale des nouvelles transcendantes, les constantes qui y entrent n'étant assujetties qu'aux deux conditions :

$$\mu = e^{\lambda a}$$
$$\mu' = e^{\lambda b - \frac{2i\pi}{a}(g-h)}.$$

Considérons maintenant le cas particulier le plus simple de cette formule, lorsqu'on n'a qu'un seul pôle, en posant :

$$f(x) = e^{\lambda x} \frac{\chi(x+c+\omega)\,\chi'(c)}{\chi(x+c)\,\chi'(c+\omega)}$$

de sorte que ce pôle unique soit $x=0$, et le résidu correspondant égal à l'unité.

Disposons, en outre, de λ et ω, de manière à avoir :

$$\mu = e^{\lambda a}$$
$$\mu' = e^{\lambda b - \frac{2i\pi}{a}\omega};$$

je vais montrer que cette fonction joue à l'égard de $F(x)$ le rôle d'élément simple.

J'envisage à cet effet le produit :

$$\Phi(z) = F(z) f(x-z)$$

en je remarque qu'ayant :

$$f(x-z-a) = \frac{1}{\mu} f(x-z),$$
$$f(x-z-b) = \frac{1}{\mu'} f(x-z),$$

il représente, quelque soit x, une fonction doublement périodique de la variable z. Ses pôles de cette fonction dans le parallélogramme des périodes sont ceux de $F(z)$ en $z=x$; les résidus correspondants s'obtiennent de la manière suivante.

Soit $z=p$, l'un quelconque des pôles de $F(z)$, on pose en nous bornant à la partie principale :

$$F(p+h) = \frac{P}{h} + P_1 D_h\left(\frac{1}{h}\right) + P_2 D_h^2\left(\frac{1}{h}\right) + \ldots\ldots + P_n D_h^n\left(\frac{1}{h}\right);$$

joignons aussi à cette relation la suivante que donne la formule de Taylor :

$$f(x-p-h) = f(x-p) - \frac{h}{1} f'(x-p) + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x-p) + \ldots\ldots$$

on trouve pour le coefficient du terme en $\frac{1}{h}$, dans le produit de ces deux séries la quantité :

$$P f(x-p) + P_1 f'(x-p) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P_n f^n(x-p).$$

C'est le résultat qu'il s'agissait d'obtenir, et l'on a d'ailleurs immédiatement pour le résidu relatif au pôle $z=x$ la valeur $-F(x)$. Cela étant, le théorème précédemment établi, que les résidus d'une fonction à double période, pour tous les pôles à l'intérieur du parallélogramme des périodes, ont une somme égale à zéro, nous donne l'équation suivante :

$$\Sigma\left[P f(x-p) + P_1 f'(x-p) + \ldots\ldots\ldots + P_n f^n(x-p)\right] - F(x) = 0.$$

On en conclut l'expression que j'avais en vue d'obtenir, à savoir :

$$F(x) = \Sigma\left[P f(x-p) + P_1 f'(x-p) + \ldots\ldots\ldots + P_n f^n(x-p)\right].$$

A ces nouvelles transcendantes qui comprennent en particulier les fonctions à double période, lorsque les multiplicateurs μ et μ' deviennent égaux à l'unité, on attribue la désignation de fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Je montrerai encore de quelle manière, lorsqu'on suppose $\lambda=0$ et $\omega=0$, afin d'avoir $\mu=1$ et $\mu'=1$, la formule précédente revient, en effet, à celle qui concerne les fonctions à double période. Remarquons d'abord que pour ω infiniment petit, on a en développant suivant les puissances croissantes de cette quantité :

$$\frac{X'(c)}{X(c+\omega)} = \frac{X'(c)}{\omega X'(c) + \frac{\omega^2}{2} X''(c) + \ldots}$$
$$= \frac{1}{\omega} + g + g'\omega + \ldots\ldots$$

en désignant par $g, g', \ldots\ldots$ des coefficients constants. Nous avons également par la formule de Taylor :

$$\frac{X(x+c+\omega)}{X(x+c)} = 1 + \frac{X'(x+c)}{X(x+c)}\omega + \ldots\ldots;$$

on en conclut en multipliant membre à membre qu'on peut écrire, si l'on suppose $\lambda=0$ et ω infiniment petit :

$$f(x) = \frac{1}{\omega} + \frac{X'(x+c)}{X(x+c)} + g + \ldots\ldots$$

les termes qui suivent contenant ω en facteur.

Cela posé, les coefficients $P_1, P_1, \ldots$ étant des fonctions de ω, nous poserons :

$$P = A + A'\omega + \ldots\ldots$$

Multiplions membre à membre, nous obtiendrons :

$$Pf(x) = \frac{A}{\omega} + A\frac{\chi'(x+c)}{\chi(x+c)} + Ag + A' + \ldots$$

ou encore en remplaçant $Ag + A'$ par une nouvelle constante C, et introduisant la fonction $Z(x)$:

$$Pf(x) = \frac{A}{\omega} + AZ(x) + C + \ldots\ldots$$

Cette formule nous donne le résultat cherché ; on en conclut en effet :

$$\sum_{0,r} Pf(x-p) = \frac{1}{\omega}\sum A + \sum AZ(x-p) + \text{Constante},$$

et l'on voit que dans le second membre le terme en $\frac{1}{\omega}$ disparaît, les quantités A ayant une somme nulle comme résidus d'une fonction doublement périodique ; nous avons donc à la limite pour $\omega = 0$:

$$\sum_{0,r} Pf(x-p) = \sum AZ(x-p).$$

Et quand aux dérivées des éléments simples, la formule précédente :

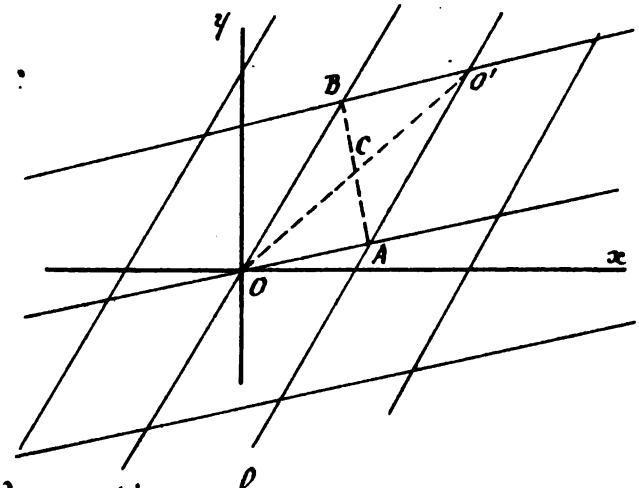
$$f(x) = \frac{1}{\omega} + Z(x) + g + \ldots$$

montre qu'ils se réduisent immédiatement aux dérivées de même ordre de $Z(x)$

Les considérations que nous venons d'exposer montrent l'importance de la fonction holomorphe :

$$\chi(x) = \sum Q^{m^2} e^{\frac{2mi\pi x}{a}},$$

on voit en effet qu'elle est l'élément analytique unique par lequel s'expriment les fonctions doublement périodiques de première et de seconde espèce. Nous allons faire un nouveau pas dans son étude, en la décomposant en facteurs primaires, et pour cela nous chercherons d'abord les racines de l'équation : $\chi(x) = 0$.



Décomposons le plan en un réseau de parallélogrammes dont les côtés soient tous égaux et parallèles à OA et OB, O étant l'origine, A et B les points dont les affixes sont a et b.

A l'intérieur de chaque parallélogramme nous savons que l'équation $\chi(x) = 0$ a une seule racine ; je dis que cette racine est représentée par le centre de ce parallélogramme, c'est-à-dire qu'elle a pour affixe $c + ma + nb$, c étant toujours égal à $\frac{a+b}{2}$, m et n étant deux entiers quelconques.

Nous avons en effet : $\chi(c + ma + nb) = \chi(c + nb) = \chi(c)\, e^{\frac{-ni\pi}{a}(2x+nb)}$; or $\chi(c) = 0$, il en est de même par conséquent de $\chi(c + ma + nb)$. Les racines de l'équation $\chi(x) = 0$ sont

donc donnée par la formule : $x = c + ma + nb$, m et n recevant toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles.

Ce point établi, je vais appliquer à la fonction

$$Z(x) = \frac{\chi'(x+c)}{\chi(x+c)}$$

dont les pôles sont communs, la proposition de M. Mittag-Leffler.

Soit $p = ma + nb$, m et n n'étant pas nuls en même temps, je dis en premier lieu que la série $\Sigma \frac{1}{(\mathrm{mod}\, p)^3}$ est convergente ; c'est ce que je vais établir en employant une méthode ingénieuse due à Eisenstein.

J'envisage l'ellipse donnée par l'équation :

$$\mathrm{mod}^2(ax + by) = 1,$$

et je désigne par A son grand axe. Pour toutes les valeurs de x et y qui représentent un point de la courbe, on a donc :

$$x^2 + y^2 < A^2,$$

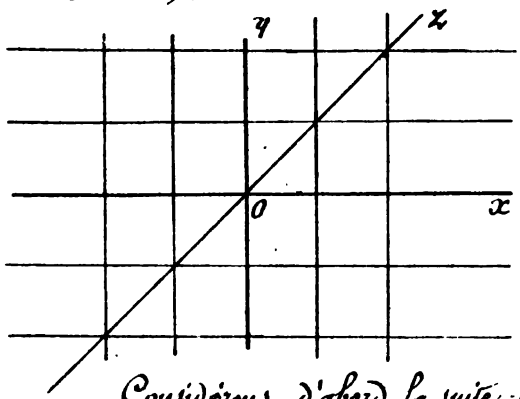
ou bien, comme en ce point $\mathrm{mod}^2(ax+by) = 1$:

$$x^2 + y^2 < A^2 \mathrm{mod}^2(ax+by).$$

Cette relation étant homogène par rapport aux variables x et y subsiste si on remplace x et y par Kx et Ky, K étant une quantité quelconque. Elle a donc lieu quelles que soient les quantités x et y, et nous la mettons sous la forme :

$$\frac{1}{\mathrm{mod}(ax+by)} < \frac{A}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Une limite supérieure de la somme considérée $\Sigma\Sigma \frac{1}{\mathrm{mod}^3(ma+nb)}$ est donc : $A \Sigma\Sigma \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}}$, et il suffit de démontrer la convergence de cette série qui est d'une forme plus simple.



A cet effet, partageons le plan en carrés par des parallèles aux axes Oy et Ox dont les abscisses et les ordonnées représentent tous les nombres entiers.

Les sommets de ces carrés, l'origine étant mise à part, ont donc ainsi pour coordonnées tous les nombres entiers et correspondent aux divers termes de la série $\Sigma\Sigma \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Considérons d'abord la suite formée par la somme des termes correspondant aux sommets situés sur la bissectrice Oz de l'angle des coordonnées xOy ; pour ces points on a $m = n$; la somme envisagée est donc égale, à un facteur numérique près, à la série simple $\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{m^3}$; elle est par suite convergente.

Prenons maintenant la somme des termes correspondant aux points situés sur Ox et dans l'angle xOx ; il suffira évidemment d'établir la convergence pour démontrer notre proposition

Soit pour abréger l'écriture : $\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}} = (m,n)$ et posons :

$$u_0 = (1.0)$$
$$u_2 = (2,0)+(2,1)$$
$$u_3 = (3,0)+(3,1)+(3,2)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_m = (m,0)+(m,1)+\dots\dots+(m,m-1)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

La série simple à laquelle nous sommes ainsi amené, à savoir :

$$u_1+u_2+u_3+\dots\dots+u_m+\dots\dots$$

est manifestement convergente. En effet, chacun des m termes qui composent u_m est plus petit que le premier $(m,0)$ qui est égal à $\frac{1}{m^3}$; u_m est donc : $< \frac{1}{m^2}$, elle a par conséquent pour limite supérieure la série $\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^2}$, dont la valeur est finie.

Ceci posé, observons que $Z(x)$ étant la dérivée logarithmique d'une fonction holomorphe, tous les résidus sont égaux à l'unité ; le théorème de M. Mittag-Leffler donne donc l'expression suivante de cette fonction :

$$Z(x) = G(x) + \frac{1}{x} + \Sigma\left[\frac{1}{x-p} + \frac{1}{p} + \frac{x}{p^2}\right],$$

$G(x)$ désignant une fonction holomorphe qui reste à déterminer. Pour cela, je pars de la relation :

$$Z''(x) = G''(x) + \frac{2}{x^3} + 2\Sigma\frac{1}{(x-p)^3},$$

ou plus simplement :

$$Z''(x) = G''(x) + 2\Sigma\frac{1}{(x-p)^3},$$

en convenant de ne plus exclure dans le second membre la valeur $p=0$, et j'observe que la série $\Sigma\frac{1}{(x-p)^3}$ représente une fonction doublement périodique. On peut en effet, sans changer l'expression $\Sigma\frac{1}{(x-ma-nb)^3}$ où les nombres entiers m et n prennent toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, remplacer m par $m-1$ et n par $n-1$, ce qui revient à mettre $x+a$ et $x+b$, au lieu de x. Remarquons aussi que cette série double se met par l'introduction des fonctions circulaires, sous forme de série simple.

La relation connue :

$$\left(\frac{\pi}{\sin\pi x}\right)^2 = \Sigma\frac{1}{(x-m)^2}$$

donne en effet, en prenant la dérivée :

$$\frac{\pi^3\cos\pi x}{\sin^3\pi x} = \Sigma\frac{1}{(x-m)^3}.$$

Remplaçons ensuite x par $\frac{x}{a}$, on aura :

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^3\frac{\cos\frac{\pi x}{a}}{\sin^3\frac{\pi x}{a}} = \Sigma\frac{1}{(x-ma)^3}$$

puis en changeant x en $x-nb$:

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^3\frac{\cos\frac{\pi}{a}(x-nb)}{\sin^3\frac{\pi}{a}(x-nb)} = \Sigma\frac{1}{(x-ma-nb)^3},$$

d'où par conséquent :

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^3 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{a}(x-nb)}{\sin^3\frac{\pi}{a}(x-nb)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m,n} \frac{1}{(x-ma-nb)^3}.$$

Cette remarque faite, rappelons que $Z'(x)$ et par conséquent $Z''(x)$ représente aussi une fonction doublement périodique, on voit donc que $G''(x)$ étant à la fois holomorphe et à double période, est nécessairement une constante C, de sorte que nous devons écrire :

$$Z''(x) = C + 2\left(\frac{\pi}{a}\right)^3 \sum \frac{\cos\frac{\pi}{a}(x-nb)}{\sin^3\frac{\pi}{a}(x-nb)}.$$

La valeur de C s'obtient en intégrant entre les limites x et $x+a$ les deux membres de cette relation ; en effet, nous avons d'abord :

$$\int_x^{x+a} Z''(x)\,dx = Z'(x+a) - Z'(x) = 0,$$

puis, pour un terme quelconque de la série :

$$\int_a^{x+a} \frac{\cos\frac{\pi}{a}(x-nb)}{\sin^3\frac{\pi}{a}(x-nb)}\,dx = \frac{a}{\pi}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{a}(x+a+nb)} - \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{a}(x-nb)}\right] = 0,$$

de sorte qu'on trouve immédiatement $C=0$. Ce point établi, je reprends l'expression de $Z''(x)$ sous la forme :

$$Z''(x) = \frac{2}{x^3} + 2\sum \frac{1}{(x-p)^3};$$

on en conclut en désignant par α et β des constantes :

$$Z(x) = \frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{1}{x} + \sum\left[\frac{1}{x-p} + \frac{1}{p} + \frac{x}{p^2}\right],$$

et par conséquent l'expression que nous avions en vue d'obtenir, où A représente une nouvelle constante, à savoir :

$$X(x-c) = A e^{\alpha x^2 + \beta x} \cdot x \prod\left[\left(1-\frac{x}{p}\right) e^{\frac{x}{p} + \frac{x^2}{2p^2}}\right]$$

Nous abordons maintenant un point important de la théorie des fonctions doublement périodiques, le seul qui sera traité dans ces leçons, où l'on se propose d'obtenir la fonction inverse de l'intégrale elliptique de première espèce.

Revenant, dans ce but, à l'expression générale de ces fonctions par la formule $\frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}$, nous considérerons le cas le plus simple qu'elle présente, et qui s'obtient en supposant $j=2$. Pour $j=1$, on se rappelle en effet qu'on a :

$$\Phi(x) = AX(x) \quad \text{et} \quad \Pi(x) = BX(x),$$

de sorte que le rapport des deux fonctions est une constante. Pour ce cas de $j=2$, les coefficients A_m dans la série

$$\Phi(x) = \sum A_m Q^{\frac{m^2}{4}} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}$$

ont seulement deux valeurs distinctes, A_0 si m est pair, A_1 si m est impair ; de sorte qu'on peut écrire :

$$\Phi(x) = A_0 \sum Q^{2m^2} e^{\frac{4mi\pi x}{a}} + A_1 \sum Q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \frac{2(2m+1)i\pi x}{a}.$$

Posons afin d'obtenir les notations de Jacobi :

$$a = 4K \quad , \quad b = 2iK' ;$$

puis :
$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$$

ce qui nous donnera :
$$Q = q^{\frac{1}{4}} .$$

La première des deux séries dont la somme compose $\Phi(x)$ devenant ainsi :

$$A_0 \Sigma q^{m^2} e^{\frac{mi\pi x}{K}} ;$$

nous ferons :

$$\Theta_1(x) = \Sigma q^{m^2} e^{\frac{mi\pi x}{K}} .$$

Si l'on réunit les termes qui correspondent aux valeurs de m égales et de signe contraire on peut encore écrire :

$$\Theta_1(x) = 1 + 2q \cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4 \cos\frac{2\pi x}{K} + 2q^9 \cos\frac{3\pi x}{K} + \cdots,$$

La seconde série étant :

$$A_1 \Sigma q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} . e^{\frac{(2m+1)i\pi x}{2K}}$$

nous poserons :
$$H_1(x) = \Sigma q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} . e^{\frac{(2m+1)i\pi x}{2K}}$$

ou bien encore en groupant les termes qui correspondent aux valeurs m et $-m-1$:

$$H_1(x) = 2\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi x}{2K} + 2\sqrt[4]{q^9}\cos\frac{3\pi x}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos\frac{5\pi x}{2K} + \cdots$$

De même qu'à $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$ on associe $\cos x$ et $\operatorname{cotg} x$, nous joindrons aux fonctions Θ_1 ou H_1 les suivantes :

$$\Theta_1(K - x) = \Theta(x) ,$$
$$H_1(K - x) = H(x) .$$

Elles s'expriment comme il suit :

$$\Theta(x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi x}{K} + \cdots$$

$$H(x) = 2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi x}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi x}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin\frac{5\pi x}{2K} + \cdots$$

Ces fonctions Θ_1, H_1, Θ, H, dont les trois premières sont paires et la dernière impaire sont les transcendantes de Jacobi, à l'aide desquelles nous allons résoudre le problème de l'inversion de l'intégrale elliptique de première espèce.

En premier lieu, nous établirons les relations fondamentales auxquelles elles satisfont lorsqu'on ajoute à la variable les quantités K, iK', $K + iK'$.

Nous avons d'abord immédiatement :

$$\Theta_1(x + K) = + \Theta(x) ,$$
$$H_1(x + K) = - H(x) ,$$
$$\Theta(x + K) = + \Theta_1(x) ,$$
$$H(x + K) = + H_1(x) ,$$

Reprenons ensuite la fonction $\varphi(x) = e^{\frac{\pi i x^2}{2K}}$ qui devient dans le cas présent $e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}$, d'après ce que nous avons vu plus haut, on a immédiatement :

$$\varphi(x)\,\Theta_1(x) = \Sigma\,\varphi(x + 2miK')$$
$$\varphi(x)\,H_1(x) = \Sigma\,\varphi[x + (2m+i)iK'].$$

Cela étant, il suffit de changer x en $x + iK'$ pour obtenir les relations :

$$\varphi(x+iK')\,\Theta_1(x+iK') = \varphi(x)\,H_1(x)$$
$$\varphi(x+iK')\,H_1(x+iK') = \varphi(x)\,\Theta_1(x).$$

En faisant pour abréger :

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+iK')} = e^{\frac{-i\pi}{4K}(2x+iK')} = \lambda,$$

on a ainsi :

$$\Theta_1(x+iK') = \lambda H_1(x),$$
$$H_1(x+iK') = \lambda \Theta_1(x).$$

Mettons ensuite $x + K$ au lieu de x, et remarquons que λ se change en $\lambda e^{\frac{-i\pi}{2}} = -i\lambda$, nous en conclurons :

$$\Theta(x+iK') = i\lambda H(x),$$
$$H(x+iK') = i\lambda \Theta(x).$$

Le second système de relations est donc :

$$\Theta_1(x+iK') = \lambda H_1(x),$$
$$H_1(x+iK') = \lambda \Theta_1(x),$$
$$\Theta(x+iK') = i\lambda H_1(x),$$
$$H(x+iK') = i\lambda \Theta(x).$$

Le troisième s'en déduit en changeant x en $x + K$; nous obtenons ainsi :

$$\Theta_1(x+K+iK') = i\lambda H(x),$$
$$H_1(x+K+iK') = -i\lambda \Theta(x),$$
$$\Theta(x+K+iK') = \lambda H_1(x),$$
$$H(x+K+iK') = \lambda \Theta_1(x).$$

Désignons enfin par λ_1 ce que devient λ quand on change x en $x+iK'$, c'est-à-dire : $\lambda_1 = e^{\frac{-i\pi}{4K}(2x+3iK')}$, et posons :

$$\mu = \lambda\lambda_1 = e^{\frac{-i\pi}{K}(x+iK')},$$

on conclut des équations du second système, en changeant x en $x+iK'$:

$$\Theta_1(x+2iK') = +\mu\,\Theta_1(x),$$
$$H_1(x+2iK') = +\mu\,H_1(x),$$
$$\Theta(x+2iK') = -\mu\,\Theta(x),$$
$$H(x+2iK') = -\mu\,H(x).$$

Ce sont là les relations fondamentales entre les quatre transcendantes de Jacobi.

$$\mathrm{cn}(x+iK') = \frac{\mathrm{dn}x}{ik\,\mathrm{sn}x},$$

$$\mathrm{dn}(x+iK') = \frac{\mathrm{cn}x}{i\,\mathrm{sn}x},$$

en remarquons que si l'on fait $x=0$, $\mathrm{sn}x$ s'évanouit, tandis que $\mathrm{cn}x$ et $\mathrm{dn}x$ sont égaux à l'unité, d'après la définition même des constantes k et k'. En désignant par $-\omega$ la limite du rapport $\frac{\mathrm{sn}x}{x}$ pour une valeur nulle de la variable, on trouve ainsi :

$$R = \frac{1}{ik\omega}, \qquad R_1 = \frac{1}{ik'\omega}, \qquad R_2 = \frac{1}{i\omega}.$$

Ceci posé, une application facile des formules de décomposition en éléments simples, va nous donner les équations différentielles qui rattachent à l'intégrale elliptique les quantités $\mathrm{sn}x$, $\mathrm{cn}x$, $\mathrm{dn}x$; et de la même source nous tirerons aussi les expressions découvertes par Euler pour l'addition des arguments dans ces fonctions.

Soit en premier lieu :

$$F(x) = \mathrm{cn}x\,\mathrm{dn}x,$$
$$F_1(x) = \mathrm{sn}x\,\mathrm{dn}x,$$
$$F_2(x) = \mathrm{sn}x\,\mathrm{cn}x;$$

dans ces trois cas nous avons le seul pôle $x=iK'$, qui entre au second degré; on peut donc immédiatement écrire en désignant par α et β des constantes :

$$\mathrm{cn}x\,\mathrm{dn}x = \alpha\,\mathrm{sn}x + \beta D_x \mathrm{sn}x,$$
$$\mathrm{sn}x\,\mathrm{dn}x = \alpha'\,\mathrm{cn}x + \beta' D_x \mathrm{cn}x,$$
$$\mathrm{sn}x\,\mathrm{cn}x = \alpha''\,\mathrm{dn}x + \beta'' D_x \mathrm{dn}x.$$

Mais $\mathrm{cn}x\,\mathrm{dn}x$ est une fonction paire, $\mathrm{sn}x\,\mathrm{dn}x$ et $\mathrm{sn}x\,\mathrm{cn}x$ sont impaires, on en conclut que α, α', α'' sont nulles. Enfin, ayant dans le voisinage du pôle : $\mathrm{sn}x = \frac{R}{x-iK'}$, $\mathrm{cn}x = \frac{R_1}{x-iK'}$, $\mathrm{dn}x = \frac{R_2}{x-iK'}$, il faut poser les conditions :

$$R_1 R_2 = -\beta R,$$
$$R R_2 = -\beta' R_1,$$
$$R R_1 = -\beta'' R_2,$$

et ces relations donnent :

$$\beta = \frac{1}{\omega}, \qquad \beta' = -\frac{1}{\omega}, \qquad \beta'' = -\frac{1}{k^2\omega}.$$

Nous obtenons ainsi les équations différentielles :

$$D_x \mathrm{sn}x = \omega\,\mathrm{cn}x\,\mathrm{dn}x,$$
$$D_x \mathrm{cn}x = -\omega\,\mathrm{sn}x\,\mathrm{dn}x,$$
$$D_x \mathrm{dn}x = -k^2\omega\,\mathrm{sn}x\,\mathrm{cn}x.$$

Voici les conséquences qui s'en tirent :

On a d'abord :

$$\operatorname{Sn}x\, D_x \operatorname{Sn}x + \operatorname{Cn}x\, D_x \operatorname{Cn}x = 0,$$
$$k^2 \operatorname{Sn}x\, D_x \operatorname{Sn}x + \operatorname{dn}x\, D_x \operatorname{dn}x = 0,$$

d'où :

$$\operatorname{Sn}^2x + \operatorname{Cn}^2x = C,$$
$$k^2 \operatorname{Sn}^2x + \operatorname{dn}^2x = C'.$$

Les constantes se déterminent en faisant $x=0$, ce qui donne immédiatement $C=1$, $C'=1$, et l'on parvient ainsi aux relations algébriques :

$$\operatorname{Sn}^2x + \operatorname{Cn}^2x = 1,$$
$$k^2 \operatorname{Sn}^2x + \operatorname{dn}^2x = 1.$$

Posons : $x = K$ dans la seconde ; on a, comme on le trouve facilement, $\operatorname{Sn}K = 1$, $\operatorname{dn}K = k'$, et on en conclut cette relation d'une grande importance :

$$k^2 + k'^2 = 1.$$

Soit maintenant, afin d'arriver à l'inversion de l'intégrale elliptique de première espèce :

$$\operatorname{Sn}x = z,$$

les résultats précédents nous donnent :

$$\frac{dz}{dx} = \omega \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

d'où :

$$\omega dx = \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

et par conséquent :

$$\omega x = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

en posant, comme nous l'avons fait dans les leçons précédentes :

$$R(z) = (1-z^2)(1-k^2z^2).$$

Supposons les quantités K, K' réelles ; les constantes que nous avons désignées par k et k' seront de même réelles et inférieures à l'unité, d'après la condition : $k^2+k'^2=1$; cela étant, lorsque x passe par une suite de valeurs réelles de 0 à K, z varie, en restant fini, de 0 à 1 ; donc on a :

$$\omega K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Si maintenant z passe de 1 à $\frac{1}{k}$, nous avons démontré que x varie de K à $K+iK'$; nous pouvons donc poser :

$$\omega i K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

ou, comme nous l'avons déjà vu :

$$\omega K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}}.$$

Cela étant, pour parvenir à l'inversion de l'intégrale :

$$\xi = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

$$\text{I.}\begin{cases} cnx\,sna\,dn(x+a) = dna\,sn(x+a) - snx\,cna \\ dnx\,sna\,cn(x+a) = cna\,sn(x+a) - snx\,dna \end{cases}$$

$$\text{II.}\begin{cases} snx\,sna\,dn(x+a) = cnx\,cna - cn(x+a) \\ dnx\,sna\,sn(x+a) = cnx - cna\,cn(x+a) \end{cases}$$

$$\text{III.}\begin{cases} k^2 snx\,sna\,cn(x+a) = dnx\,dna - dn(x+a) \\ k^2 cnx\,sna\,sn(x+a) = dnx - dna\,dn(x+a) \end{cases}$$

Qu'on prenne maintenant dans les équations I et II celles-ci :

$$dnx\,sna\,cn(x+a) = cna\,sn(x+a) - snx\,dna,$$
$$dnx\,sna\,sn(x+a) = cnx - cna\,cn(x+a),$$

on en tire d'abord :

$$sn(x+a) = \frac{snx\,cna\,dna + cnx\,dnx\,sna}{1 - k^2 sn^2x\,sn^2a},$$

$$cn(x+a) = \frac{cnx\,cna - snx\,dnx\,sna\,dna}{1 - k^2 sn^2x\,sn^2a};$$

et nous avons ensuite au moyen d'une des relations III :

$$dn(x+a) = \frac{dnx\,dna - k^2 snx\,cnx\,sna\,cna}{1 - k^2 sn^2x\,sn^2a}.$$

Bien d'autres méthodes conduisent à ces mêmes résultats, et la suivante que j'indiquerai encore nous donnera en outre la formule importante concernant l'addition des arguments pour la fonction : $Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$

Soit les expressions :

$$\Phi(x) = k^2 snx\,sn(x+a),$$
$$\Phi_1(x) = k^2 cnx\,cn(x+a),$$
$$\Phi_2(x) = k^2 dnx\,dn(x+a),$$

qui ont évidemment $2K$ et $2iK'$ pour périodes ; nous les décomposerons en éléments simples, en appliquant la formule générale relative aux fonctions doublement périodiques.

Remarquant dans ce but que l'expression $X(x) = \Sigma Q^{m^2} e^{\frac{2mi\pi x}{\omega}}$, qui a été précédemment employée, devient $\Theta_1(x)$ si on y remplace a par $2K$ et b par $2iK'$; on a en même temps : $c = K + iK'$, et la quantité servant d'élément simple devient :

$$\frac{\Theta_1'(x+K+iK')}{\Theta_1(x+K+iK')} = \frac{\Theta'(x+iK')}{\Theta(x+iK')}.$$

Cela étant, les pôles des fonctions que nous envisageons sont précisément les racines des équations $\Theta(x) = 0$, $\Theta(x+a) = 0$; on peut donc prendre comme situées dans le même parallélogramme des périodes les racines iK' et $-a+iK'$. Comme ces racines sont simples, l'expression de $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ en désignant par R et R_1 les résidus correspondants et par C une constante, se présente sous la forme suivante :

$$C + R\,\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + R_1\,\frac{\Theta'(x+a)}{\Theta(x+a)}.$$

Mais on sait que : $R + R_1 = 0$; on a donc dans les trois cas, en modifiant la constante, l'expression suivante :

$$C + R\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'(x+a)}{\Theta(x+a)} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right],$$

ou plus simplement si l'on pose : $Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$:

$$C + R\left[Z(x) - Z(x+a) + Z(a)\right].$$

Calculons maintenant les résidus R de nos trois fonctions pour $x = iK'$; nous remarquerons qu'ils sont respectivement les mêmes que ceux des expressions suivantes pour $x = 0$, à savoir :

$$\Phi(x+iK') = \frac{1}{\operatorname{sn}(x+a)\operatorname{sn}x}$$

$$\Phi_1(x+iK') = -\frac{\operatorname{dn}x\operatorname{dn}(x+a)}{\operatorname{sn}x\operatorname{sn}(x+a)}$$

$$\Phi_2(x+iK') = -\frac{\operatorname{cn}x\operatorname{cn}(x+a)}{k^2\operatorname{sn}x\operatorname{sn}(x+a)}$$

On trouve ainsi :

$$R = \frac{1}{\omega \operatorname{sn}a}, \quad -\frac{\operatorname{dn}a}{\omega \operatorname{sn}a}, \quad -\frac{k^2\operatorname{cn}a}{\omega \operatorname{sn}a},$$

et l'on en conclut ces relations :

$$\begin{cases} k^2\operatorname{sn}x\operatorname{sn}(x+a) = C + \dfrac{1}{\omega\operatorname{sn}a}\left[Z(x) + Z(x+a) + Z(a)\right], \\ k^2\operatorname{cn}x\operatorname{cn}(x+a) = C_1 - \dfrac{\operatorname{dn}a}{\omega\operatorname{sn}a}\left[Z(x) + Z(x+a) + Z(a)\right], \\ \operatorname{dn}x\operatorname{dn}(x+a) = C_2 - \dfrac{\operatorname{cn}a}{\omega\operatorname{sn}a}\left[Z(x) + Z(x+a) + Z(a)\right]. \end{cases}$$

Les constantes se déterminent immédiatement en faisant $x = 0$, et on a finalement :

$$\begin{cases} k^2\omega\operatorname{sn}x\operatorname{sn}a\operatorname{sn}(x+a) = \left[Z(x) + Z(x+a) + Z(a)\right], \\ k^2\omega\operatorname{cn}x\operatorname{sn}a\operatorname{cn}(x+a) = \left[Z(x) + Z(x+a) + Z(a)\right], \\ \omega\operatorname{dn}x\operatorname{sn}a\operatorname{dn}(x+a) = \left[Z(x) + Z(x+a) + Z(a)\right]. \end{cases}$$

Éliminons entre ces trois relations la quantité entre crochets ; on obtient :

$$\begin{cases} \operatorname{cn}x\operatorname{cn}(x+a) = \operatorname{cn}a - \operatorname{sn}x\operatorname{dn}a\operatorname{sn}(x+a), \\ \operatorname{dn}x\operatorname{dn}(x+a) = \operatorname{dn}a - k^2\operatorname{sn}x\operatorname{cn}a\operatorname{sn}(x+a) ; \end{cases}$$

en nous reconnaissons en permutant x et a, deux des équations que nous avons précédemment obtenues, dont les autres peuvent ensuite se déduire.

La relation à laquelle nous venons de parvenir :

$$k^2\omega\operatorname{sn}x\operatorname{sn}a\operatorname{sn}(x+a) = Z(x) - Z(x+a) + Z(a)$$

est d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques ; je me bornerai à en déduire

la conséquence suivante.

Divisons les deux membres par a, et supposons $a=0$, on aura en désignant par ζ la constante $Z'(0)$:

$$k^2\omega^2 sn^2x = -Z'(x) + \zeta ;$$

on en conclut d'abord :

$$Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \zeta x - \int_0^x k^2\omega^2 sn^2x\, dx ,$$

puis par une nouvelle intégration cette expression de $\Theta(x)$, à savoir :

$$\frac{\Theta(x)}{\Theta(0)} = e^{\frac{1}{2}\zeta x^2} - \int_0^x dx \int_0^x k^2\omega^2 sn^2x\, dx .$$

On voit ainsi que l'exponentielle :

$$e^{-\int_0^x dx \int_0^x k^2\omega^2 sn^2x\, dx}$$

est une fonction holomorphe de la variable ; M^r Weierstrass, qui l'a introduite avec le plus grand succès dans la théorie des fonctions elliptiques, la représente par $Al(x)$, de sorte que l'on a :

$$Al(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2}\Theta(x)}{\Theta(0)} .$$

Trois autres fonctions de même nature qui correspondent à $H(x)$, $H_1(x)$ et $\Theta_1(x)$ sont désignées par $Al(x)_1$, $Al(x)_2$, $Al(x)_3$, et définies par les relations :

$$Al(x)_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2}H(x)}{H'(0)} ,$$

$$Al(x)_2 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2}H_1(x)}{H_1(0)} ,$$

$$Al(x)_3 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2}\Theta_1(x)}{\Theta_1(0)} .$$

J'ai voulu seulement donner la définition de ces transcendantes, qui ne seront pas étudiées dans ces leçons.

XXV^ème Leçon.

Nous avons vu dans la leçon précédente, que les quantités $\Theta(x)$, $\Theta_1(x)$, $H(x)$, $H_1(x)$ ne changeaient point, lorsqu'on y remplace x, K, K' par ωx, ωK, $\omega K'$; nous conviendrons par suite qu'elles seront définies dorénavant en prenant :

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{R_1(x)}}.$$

De là résulte, comme nous l'avons établi, que si l'on fait :

$$\mathrm{sn}x = \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{H(x)}{\Theta(x)},$$

$$\mathrm{cn}x = \sqrt{\frac{K'}{K}} \frac{H_1(x)}{\Theta(x)},$$

$$\mathrm{dn}x = \sqrt{K'} \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)},$$

on a lorsque le module k est supposé réel et inférieur à l'unité, les trois équations différentielles :

$$D_x \mathrm{sn}x = \mathrm{cn}x\,\mathrm{dn}x,$$

$$D_x \mathrm{cn}x = -\mathrm{sn}x\,\mathrm{dn}x,$$

$$D_x \mathrm{dn}x = -k^2 \mathrm{sn}x\,\mathrm{cn}x.$$

Voici maintenant une remarque importante :

La constante k^2 qui entre dans ces relations, figure sous des signes d'intégrales définies dans les fonctions qui en représentent la solution. On est donc conduit à se demander si ces intégrales sont des fonctions uniformes du module, en remplissant la condition caractéristique de ce genre de fonctions de reprendre la même valeur, lorsque k^2 décrit à partir d'un point et en y revenant, des contours quelconques. La réponse à cette question a été donnée par un des géomètres les plus éminents de notre époque, M. Fuchs, professeur à l'université de Heidelberg, qui s'est illustré par ses belles découvertes sur la théorie des équations différentielles linéaires. Dans un mémoire intitulé : Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces (Journal de Bouchardt, T. 83, p. 13), M. Fuchs a établi les propositions suivantes, que l'on pourrait démontrer directement et sans rien emprunter à la théorie des équations différentielles linéaires :

Les valeurs $k^2 = 0$, $k^2 = 1$ sont respectivement des points de discontinuité pour les intégrales :

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \qquad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{R_1(x)}}.$$

Lorsque le module décrit un contour fermé comprenant le seul point $k^2=0$, K ne change point, tandis que iK' devient :

$$2K + iK'.$$

Et à l'égard d'un contour renfermant le point $k^2=1$, iK' ne change pas, tandis qu'on trouve au lieu de K, $K-2iK'$.

Nous sommes donc amenés à cette conséquence nécessaire, que les fonctions qu'on déduit de $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, $\operatorname{dn}x$, en remplaçant K et iK' par les quantités placées en regard :

$$\text{I} \begin{Bmatrix} K, & K \\ iK', & 2K+iK' \end{Bmatrix},$$

$$\text{II} \begin{Bmatrix} K, & K-2iK' \\ iK', & iK' \end{Bmatrix},$$

satisfont aux mêmes équations différentielles, et par suite se reproduisent comme ayant pour $x=0$, les mêmes valeurs initiales. Dans le premier cas, lorsque K ne change pas, on vérifie de suite, par la périodicité de l'exponentielle, que $q=e^{i\pi.\frac{iK'}{K}}$ ne change point non plus. Mais dans le second cas, on est conduit à de nouvelles expressions analytiques absolument distinctes de ces fonctions, et cette circonstance donne l'origine de ce que Jacobi a appelé la théorie des formes en nombre infini, des quatre transcendantes, $\Theta(x)$, $\Theta_1(x)$, $H(x)$, $H_1(x)$. Nous obtenons effectivement un nombre infini de formes, en considérant tous les contours fermés que décrit k^2 en tournant un nombre quelconque de fois dans le sens direct ou le sens inverse, autour des deux points de discontinuité. Ainsi, on aura au lieu des formules I et II, les suivantes :

$$\text{III} \begin{Bmatrix} K, & K \\ iK', & 2mK+iK' \end{Bmatrix},$$

$$\text{IV} \begin{Bmatrix} K, & K-2niK' \\ iK', & iK' \end{Bmatrix},$$

où m et n sont des entiers quelconques, positifs ou négatifs, lorsqu'on tourne m fois autour de l'origine, et n fois autour du point $k^2=1$. Cela étant, il est aisé d'en conclure qu'en considérant un contour quelconque on est conduit à remplacer K et iK' par $\alpha K+\beta iK'$, et $\gamma K+\delta iK'$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers assujettis à la condition $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, β et γ étant pairs, tandis que α et δ sont impairs et $\equiv 1$ Mod. 4. Je m'arrêterai un moment à ce point ayant ainsi l'occasion d'indiquer des considérations dont il est fait souvent usage.

On désigne une substitution linéaire

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

par le symbole : $\Sigma = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$, et si on la fait suivre d'une seconde $\Sigma' = \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}$, en posant

$$x' = \alpha' x'' + \beta' y''$$
$$y' = \gamma' x' + \delta' y''$$

on écrit sous forme d'un produit de deux facteurs :

$$\Sigma\Sigma' = \begin{pmatrix} \alpha\alpha'+\beta\gamma, & \alpha\beta'+\beta\delta' \\ \gamma\alpha'+\delta\gamma', & \gamma\beta'+\delta\delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}.$$

Cela étant, si l'on admet que les déterminants de Σ et Σ' soient égaux à l'unité il en sera de même du déterminant de la substitution composée $\Sigma\Sigma'$.

Si l'on suppose β et γ pairs, ainsi que β' et γ', tandis que α et δ d'une part, α' et δ' de l'autre sont $\equiv 1 \pmod 4$, les mêmes conditions s'offrent dans la substitution composée; b et c, sont des nombres pairs, a et d sont de la forme $4n+1$. Nous dirons que de telles substitutions, conservant leurs propriétés caractéristiques, lorsqu'on les compose entre elles, sont du type principal.

On désigne encore par $\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix}$ la substitution inverse de Σ, qui donne la relation :

$$\Sigma\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

et l'on convient d'écrire :

$$\Sigma\Sigma^{-1} = 1.$$

Enfin, on emploie une notation analogue à celle des exposants pour représenter la même substitution prise plusieurs fois de suite, en posant : $\Sigma\Sigma = \Sigma^2$, $\Sigma\Sigma\Sigma = \Sigma^3$, etc, et de même $\Sigma^{-1}\Sigma^{-1}\Sigma^{-2}$, $\Sigma^{-1}\Sigma^{-1}\Sigma^{-1} = \Sigma^{-3}$, etc.

Le sens de ces notations étant bien fixé, soit :

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1, & -2 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

de sorte que ces substitutions correspondent aux relations I et II. La substitution Σ relative à tous les contours possibles, sera :

$$\Sigma = S_0^{\lambda} S_1^{\mu} S_0^{\nu} S_1^{\rho} \ldots\ldots$$

$\lambda, \mu, \nu, \ldots\ldots$ étant des entiers quelconques, positifs ou négatifs, et la remarque que nous venons d'indiquer montrera, comme nous l'avons dit, qu'elle appartient au type principal.

Je dis ensuite que la réciproque a lieu, c'est-à-dire toute substitution du type principal peut se mettre sous la forme :

$$\Sigma = S_0^{\lambda} S_1^{\mu} S_0^{\nu} \ldots\ldots$$

Considérons à cet effet une substitution au déterminant un, de forme quelconque :

$$S = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix},$$

et employons les relations suivantes :

$$SS_0^m = \begin{pmatrix} a+2mb, & b \\ c+2md, & d \end{pmatrix},$$

$$SS_1^n = \begin{pmatrix} a, & b-2na \\ c, & d-2nc \end{pmatrix}.$$

Elles montrent qu'on peut disposer des entiers m et n, de manière que $a+2mb$ soit un

valeur-absolue moindre que b, et $b-2na$ moindre également en valeur-absolue que a. De là découle la possibilité de former une suite telle que :

$$SS_0^m = \begin{pmatrix} a', & b \\ c', & d \end{pmatrix},$$

$$SS_0^m S_1^n = \begin{pmatrix} a', & b' \\ c', & d' \end{pmatrix},$$

$$SS_0^m S_1^n S_0^p = \begin{pmatrix} a'', & b' \\ c'', & d' \end{pmatrix}$$

. . . . . .

et où l'on a, abstraction faite des signes :

$$a' < b, \qquad b' < a', \qquad a'' < b', \quad \text{etc, etc.}$$

Nous voyons par-là que les termes des deux séries :

$$a,\ a',\ a'',\ \text{etc.}$$
$$b,\ b',\ b'',\ \text{etc,}$$

allant en décroissant, on trouvera après un nombre fini d'opérations, un terme nul, c'est-à-dire que nous parviendrons à l'une des deux substitutions : $\begin{pmatrix} \alpha, & 0 \\ \beta, & \delta \end{pmatrix}$, ou : $\begin{pmatrix} 0, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$. Or, ayant $\alpha\delta = 1$, il faut prendre $\alpha = 1$, $\delta = 1$, ou bien $\alpha = -1$, $\delta = -1$; mais ces substitutions doivent appartenir au type principal, si l'on fait la supposition particulière que la substitution proposée S soit elle-même de cette catégorie. Il est donc nécessaire, dans ce cas, que α et δ soient égaux à l'unité, et que les entiers β et γ soient pairs, d'où résulte que la première substitution est une puissance de S_0 et que la seconde doit être rejetée. Cela étant, soit pour un moment :

$$T = S_0^m S_1^n S_0^p \ldots\ldots$$

nous aurons, en désignant par r un nombre entier :

$$ST = S_0^r,$$

De là on conclut : $S = T^{-1} S_0^r$, et la proposition que nous voulions établir résulte de la forme même de la substitution inverse de T. Qu'on prenne par exemple :

$$T = S_0^m S_1^n S_0^p S_1^q$$

on obtient :

$$T^{-1} = S_1^{-q} S_0^{-p} S_1^{-n} S_0^{-m}.$$

L'algorithme que nous avons exposé nous donne donc l'expression de toute substitution du type principal, au moyen des substitutions fondamentales S_0 et S_1.

Ce point établi, nous allons rechercher les expressions des fonctions $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, lorsqu'on introduit à la place des périodes K et iK' les quantités :

$$L = \alpha K + i\beta K',$$
$$iL' = \gamma K + i\delta K',$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers tels qu'on ait : $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, β et γ étant pairs, α et δ de la forme $4n+1$.

Et d'abord nous remarquerons qu'en posant :

$$\frac{iK'}{K} = g + ih, \qquad \frac{iL'}{L} = G + iH,$$

on a :

$$G + iH = \frac{\gamma + \delta(g+ih)}{\alpha + \beta(g+ih)} = \frac{\alpha\gamma + (\alpha\delta + \beta\gamma)g + \beta\delta(g^2+h^2)}{(\alpha+\beta g)^2 + \beta^2 h^2} + i\,\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)h}{(\alpha+\beta g)^2 + \beta^2 h^2};$$

par conséquent la constante H a une valeur positive connue h.

Soit maintenant :

$$\Phi(x) = e^{\frac{i\pi\beta x^2}{4KL}}\Theta(x), \qquad \Phi_1(x) = e^{\frac{i\pi\beta x^2}{4KL}}\Theta_1(x),$$

$$\Pi(x) = e^{\frac{i\pi\beta x^2}{4KL}}H(x), \qquad \Pi_1(x) = e^{\frac{i\pi\beta x^2}{4KL}}H_1(x);$$

un calcul facile donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} \Phi(x+2L) = +\Phi(x) \\ \Phi_1(x+2L) = +\Phi_1(x) \\ \Pi(x+2L) = -\Pi(x) \\ \Pi_1(x+2L) = -\Pi_1(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi(x+2iL') = -\Phi(x)\, e^{-\frac{i\pi}{L}(x+iL')} \\ \Phi_1(x+2iL') = +\Phi(x)\, e^{-\frac{i\pi}{L}(x+iL')} \\ \Pi(x+2iL) = -\Pi(x)\, e^{-\frac{i\pi}{L}(x+iL')} \\ \Pi_1(x+2iL) = +\Pi_1(x)\, e^{-\frac{i\pi}{L}(x+iL')}. \end{cases}$$

On en conclut, si l'on pose : $Q = e^{-\pi\frac{L'}{L}}$, ces développements où A, A_1, B, B_1 désignent des constantes, à savoir :

$$\Phi(x) = A\left[1 - 2Q\cos\frac{\pi x}{L} + 2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L} - \cdots\right],$$

$$\Phi_1(x) = A_1\left[1 + 2Q\cos\frac{\pi x}{L} + 2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L} + \cdots\right],$$

$$\Pi(x) = B\left[2\sqrt[4]{Q}\sin\frac{\pi x}{2L} - 2\sqrt[4]{Q^9}\sin\frac{3\pi x}{2L} + \cdots\right],$$

$$\Pi_1(x) = B_1\left[2\sqrt[4]{Q}\cos\frac{\pi x}{2L} + 2\sqrt[4]{Q^9}\cos\frac{3\pi x}{2L} + \cdots\right].$$

Nous reproduisons donc, sauf des facteurs constants, les transcendantes de Jacobi, en y remplaçant K et iK', par L et iL' ; mais la détermination de ces facteurs demande une analyse

un peu longue pour laquelle je renverrai à un article intitulé : Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques (Journal de M. Liouville, 2ème série, Tome III). Je remarque que seulement que le système des relations suivantes, à savoir :

$$\begin{cases} \Phi(x+L) = +e^{\frac{i\pi\beta}{4}}\Phi_1(x), \\ \Phi_1(x+L) = +e^{-\frac{i\pi\beta}{4}}\Phi(x), \\ \Pi(x+L) = +e^{\frac{i\pi\beta}{4}}\Pi_1(x), \\ \Pi_1(x+L) = -e^{-\frac{i\pi\beta}{4}}\Pi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi(x+iL') = ie^{\frac{i\pi\gamma}{4}}\Pi(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4L}(2x+iL')}, \\ \Phi_1(x+iL') = e^{\frac{i\pi\gamma}{4}}\Pi_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4L}(2x+iL')}, \\ \Pi(x+iL') = ie^{-\frac{i\pi\gamma}{4}}\Phi(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4L}(2x+iL')}, \\ \Pi_1(x+iL') = e^{-\frac{i\pi\gamma}{4}}\Phi_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4L}(2x+iL')}; \end{cases}$$

on conclut aisément :

$$\begin{aligned} A_1 &= Ae^{-\frac{i\pi(\beta+\gamma)}{4}}, \\ B &= Ae^{-\frac{i\pi\gamma}{4}}, \\ B_1 &= Ae^{-\frac{i\pi(\beta+\gamma)}{4}}. \end{aligned}$$

Cela posé, considérons l'expression du module en fonction de q :

$$\sqrt{k} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)} = \frac{2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + \cdots}{1+2q+2q^4+\cdots},$$

les relations précédemment données :

$$\begin{aligned} \Pi_1(x) &= e^{\frac{i\pi\beta x^2}{4KL}}H_1(x), \\ \Phi_1(x) &= e^{\frac{i\pi\beta x^2}{4KL}}\Theta_1(x), \end{aligned}$$

permettent d'écrire :

$$\sqrt{k} = e^{-\frac{i\pi\gamma}{4}}\,\frac{2\sqrt[4]{Q} + 2\sqrt[4]{Q^9} + \cdots}{1+2Q+2Q^4+\cdots},$$

ou encore :

$$\sqrt{k} = e^{-\frac{i\pi\gamma}{4}}\,\frac{2\sqrt[4]{Q} + 2\sqrt[4]{Q^9} + \cdots}{1+2Q+2Q^4+\cdots}.$$

On trouvera de même :

$$\sqrt{k} = \frac{1-2q+2q^4-\cdots}{1+2q+2q^4+\cdots} = e^{\frac{i\pi\beta}{4}}\,\frac{1-2Q+2Q^4+\cdots}{1+2Q+2Q^4+\cdots},$$

Mais désignons pour plus de clarté par $\sqrt{l}$ et $\sqrt{l'}$ les expressions :

$$\sqrt{l} = \frac{2\sqrt[4]{Q} + 2\sqrt[4]{Q^9} + \cdots}{1+2Q+2Q^4+\cdots},$$

$$\sqrt{l'} = \frac{1 - 2Q + 2Q^4 - \cdots\cdots}{1 + 2Q + 2Q^4 + \cdots\cdots},$$

ces quantités étant ce que deviennent $\sqrt{k}$ et $\sqrt{k'}$ en changeant de q en Q, ou encore par la substitution de L en iL' à K et iK'. Les relations précédentes donnent

$$\sqrt{l} = e^{-\frac{i\pi\gamma}{4}} \sqrt{\frac{k}{k'}},$$

$$\sqrt{l'} = e^{-\frac{i\pi\beta}{4}} \sqrt{\frac{k'}{k}};$$

et comme l'entier γ est pair, on en conclut en élevant à la puissance quatrième : $l^2 = k^2$.

Considérons après le module les fonctions $\operatorname{sn}x, \operatorname{cn}x, \operatorname{dn}x$ d'abord sous la forme :

$$\operatorname{sn}x = \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{\Pi(x)}{\Phi(x)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{B}{A} \cdot \frac{2\sqrt[4]{Q}\sin\frac{\pi x}{2L} + 2\sqrt[4]{Q^9}\sin\frac{3\pi x}{2L} + \cdots\cdots}{1 - 2Q\cos\frac{\pi x}{L} + 2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L} + \cdots\cdots},$$

$$\operatorname{cn}x = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\Pi_1(x)}{\Phi_1(x)} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{B_1}{A} \frac{2\sqrt[4]{Q}\cos\frac{\pi x}{2L} + 2\sqrt[4]{Q^9}\cos\frac{3\pi x}{2L} + \cdots\cdots}{1 - 2Q\cos\frac{\pi x}{L} + 2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L} + \cdots\cdots},$$

$$\operatorname{dn}x = \sqrt{k'} \frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)} = \sqrt{k'} \frac{A_1}{A} \frac{1 + 2Q\cos\frac{\pi x}{L} + 2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L} + \cdots\cdots}{1 - 2Q\cos\frac{\pi x}{L} + 2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L} + \cdots\cdots}.$$

Comme on a :

$$\frac{B}{A} = e^{-\frac{i\pi\gamma}{4}}, \qquad \frac{B_1}{A} = e^{-\frac{i\pi(\beta+\gamma)}{4}}, \qquad \frac{A_1}{A} = e^{-\frac{i\pi\beta}{4}},$$

elles prennent immédiatement cette forme nouvelle :

$$\operatorname{sn}x = \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{2\sqrt[4]{Q}\sin\frac{\pi x}{2L} - 2\sqrt[4]{Q^9}\sin\frac{3\pi x}{2L} + \cdots\cdots}{1 - Q\cos\frac{\pi x}{L} + 2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L} + \cdots\cdots},$$

$$\operatorname{cn}x = \sqrt{\frac{l'}{l}} \frac{2\sqrt[4]{Q}\cos\frac{\pi x}{2L} + 2\sqrt[4]{Q^9}\cdot\cdot\frac{3\pi x}{2L} + \cdots\cdots}{1 - 2Q\cos\frac{\pi x}{L} + 2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L} + \cdots\cdots},$$

$$\operatorname{dn}x = \sqrt{l'} \frac{1 + 2Q\cos\frac{\pi x}{L} + 2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L} + \cdots\cdots}{1 - 2Q\cos\frac{\pi x}{L} + 2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L} + \cdots\cdots}.$$

Nous voyons ainsi qu'en substituant L et L' aux quantités K et K', les fonctions $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, $\operatorname{dn}x$ restent les mêmes comme le carré du module.

Les résultats que nous venons d'obtenir ouvrent la voie à cette partie de la théorie des fonctions elliptiques, où l'on considère comme élément variable le quotient des périodes $\frac{iK'}{K}$. Nous renverrons sur ce point qui est d'une grande importance, à un beau et savant mémoire de M. Dedekind, publié dans le Journal de Borchardt, Tome 83, page 265 (Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen), et nous nous bornerons à déduire de ce qui précède l'inversion de l'intégrale elliptique, lorsque le module, au lieu d'être supposé réel et plus petit que l'unité est une quantité imaginaire quelconque. Nous nous fonderons pour cela sur cette importante proposition de Riemann que pour une telle valeur du module $k^2 = a + ib$, la partie réelle du quotient $\frac{K'}{K}$ est toujours positive. On le démontre facilement comme on va voir.

Soit d'abord en nous servant pour plus de commodité de la forme de Legendre :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(a+ib)\sin^2\varphi}}$$

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-a-ib)\sin^2\varphi}},$$

les deux intégrales étant supposées rectifiques.

Soit encore K_0 la quantité imaginaire conjuguée de K, c'est-à-dire :

$$K_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(a-ib)\sin^2\varphi}};$$

nous envisagerons le produit $K_0 K'$, en le mettant sous la forme d'une intégrale double, à savoir :

$$K_0 K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{1-(1-a-ib)\sin^2\varphi}\ \sqrt{1-(a-ib)\sin^2\varphi}}$$

et nous ferons :

$$\sqrt{1-(1-a-ib)\sin^2\varphi}\ \sqrt{1-(a-ib)\sin^2\varphi} = X + i\beta Y.$$

De là on tire en élevant au carré et égalant les coefficients de i :

$$[1-(1-a)\sin^2\varphi]\sin^2\psi + (1-a\sin^2\psi)\sin^2\varphi = 2XY,$$

ou bien :

$$\cos^2\varphi \sin^2\psi + \sin^2\varphi = 2XY,$$

et l'on voit que le produit XY est toujours positif et ne s'annule que pour $\varphi = 0$ et $\psi = 0$. Mais, dans ce cas, c'est le facteur Y qui s'évanouit, tandis que X a la valeur initiale du produit des radicaux, c'est-à-dire l'unité positive. Nous en concluons que lorsque les angles φ et ψ croissent de zéro à $\frac{\pi}{2}$, X qui ne passe jamais par zéro, garde son signe et reste toujours positif. Cela étant, il suffit d'écrire :

$$K_0 K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\, d\psi}{X+ibY} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{X\, d\varphi\, d\psi}{X^2+b^2Y^2} - ib\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Y\, d\varphi\, d\psi}{X^2+b^2Y^2}$$

pour reconnaître que la partie réelle de $K_0 K'$ et par conséquent de $\frac{K' K_0}{K K_0} = \frac{K'}{K}$ est en effet positive.

Lorsqu'on suppose $b = 0$ et a supérieur à l'unité ou bien négatif, une des quantités K et K' est réelle et positive et l'autre imaginaire. Dans le premier cas, par exemple, le radical $\sqrt{1-a\sin^2\varphi}$ passe du réel à l'imaginaire en s'évanouissant par un certain angle $\varphi = \varphi_0$, de sorte que K est imaginaire, mais alors sa partie réelle étant exprimée par l'intégrale $\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a\sin^2\varphi}}$, est essentiellement positive, de sorte que le quotient $\frac{K'}{K}$ a aussi sa partie réelle positive. On verra de même que la proposition de Riemann est évidente quand on suppose a négatif.

J'ajouterai encore cette remarque, qu'en posant :

$$\sqrt{1-(a+ib)\sin^2\varphi} = U - iV,$$

on obtient la condition :

$$\sin^2\varphi = 2UV,$$

d'où résulte que U et V sont toujours positifs lorsque φ varie de zéro à $\frac{\pi}{2}$. Ayant donc :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{U-iV} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{U\, d\varphi}{U^2+b^2V^2} + ib\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{V\, d\varphi}{U^2+b^2V^2}$$

on voit que la partie réelle de K est positive et le coefficient de i du signe de b.

De la même manière on reconnaîtra qu'à l'égard de K' la partie réelle est également positive, tandis que le coefficient de i est de signe contraire à b.

La proposition de Riemann montre qu'on peut former avec les intégrales définies K et K', pour une valeur imaginaire quelconque du module, le système des quatre fonctions $\Theta(x)$, $\Theta_1(x)$, $H(x)$, $H_1(x)$. Cela étant, je pose :

$$\sqrt{\lambda} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)},$$

$$\sqrt{\lambda'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)},$$

et je considère les expressions :

$$u = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{H(x)}{\Theta(x)},$$

$$v = \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}} \frac{H_1(x)}{\Theta(x)},$$

$$w = \sqrt{\lambda'} \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)},$$

En désignant par ω la valeur de $D_x u$ pour $x=0$, c'est-à-dire :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{H'(0)}{\Theta(0)} = \frac{\Theta_1(0) H'(0)}{H_1(0)\Theta(0)},$$

nous avons, comme on l'a établi précédemment, les relations :

$$D_x u = \omega v w,$$

$$D_x v = -\omega u w,$$

$$D_x w = -\lambda^2 \omega u v.$$

Or on a vu tout à l'heure que le quotient $\frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)}$ se reproduit multiplié par une racine quatrième de l'unité lorsqu'on fait décrire à la quantité k^2 un contour quelconque qui change K et iK' en L et iL'. Sa quatrième puissance est donc une fonction uniforme, et nous savons que cette fonction coïncide avec k^2 dans toute l'étendue des valeurs réelles de $k=0$ à $k=1$. Nous pouvons, par conséquent, conclure d'après le théorème de Riemann dont nous avons donné la démonstration (XIII^e Leçon) que l'égalité $\lambda^2 = k^2$ a lieu dans toute l'étendue du plan.

Passons à la constante désignée par ω qui a pour valeur l'unité lorsqu'on suppose encore k^2 réel et < 1. Nous établirons de même que la condition $\omega = 1$ subsiste pour toute valeur réelle ou imaginaire de k^2.

Revenons, en effet, à la relation donnée plus haut :

$$\operatorname{sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi x}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi x}{2K} + \cdots\cdots}{1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} + \cdots\cdots}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{2\sqrt[4]{Q}\sin\frac{\pi x}{2L} - 2\sqrt[4]{Q^9}\sin\frac{3\pi x}{2L} + \cdots\cdots}{1 - 2Q\cos\frac{\pi x}{L} + 2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L} + \cdots\cdots}.$$

en divisant les deux membres par x et supposant $x=0$, on en conclut que ω ne change point lorsqu'on remplace K et iK' par L et iL'. Cette quantité est donc comme λ^2 une fonction uniforme reprenant la même valeur lorsque k^2 décrit un contour fermé quelconque ; la condition $\omega=1$ est par conséquent étendue à tout le plan.

Nous dirons maintenant quelques mots des expressions de $\mathrm{sn}x, \mathrm{cn}x, \mathrm{dn}x$, qui sont dues à M. Weierstrass, dans lesquelles k^2 entre explicitement et sous forme rationnelle. Considérons à cet effet les fonctions holomorphes $Al(x)$, $Al(x)_1$, $Al(x)_2$, $Al(x)_3$, qui ont été définies par les équations :

$$Al(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2}\Theta(x)}{\Theta(0)},$$

$$Al(x)_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2}H(x)}{H'(0)},$$

$$Al(x)_2 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2}H_1(x)}{H_1(0)},$$

$$Al(x)_3 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2}\Theta_1(x)}{\Theta_1(0)}.$$

Je dis qu'en supposant :

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad K'=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}, \quad \omega=1,$$

les développements suivant les puissances croissantes de la variable de ces diverses fonctions auront pour coefficients des fonctions entières de k^2, à coefficients rationnels.

Nous remarquerons d'abord que la formule de Maclaurin conduit à des suites de cette nature pour $\mathrm{sn}x$, $\mathrm{cn}x$ et $\mathrm{dn}x$, au moyen des équations différentielles, qui déterminent de proche en proche leurs dérivées successives. On trouve effectivement ainsi les séries

$$\mathrm{sn}x = x-(1+k^2)\frac{x^3}{2.3}+(1+14k^2+k^4)\frac{x^5}{2.3.4.5}-\cdots,$$

$$\mathrm{cn}x = 1-\frac{x^2}{2}+(1+4k^2)\frac{x^4}{2.3.4}-\cdots\cdots\cdots,$$

$$\mathrm{dn}x = 1-k^2\frac{x^2}{2}+(4k^2+k^4)\frac{x^4}{2.3.4}-\cdots\cdots\cdots,$$

dont le cercle de convergence a pour rayon le module minimum des quantités qui rendent les trois fonctions discontinues, c'est-à-dire le module de K'. Cela étant, la formule :

$$Al(x) = e^{-\int_0^x dx\int_0^x k^2\,\mathrm{sn}^2x\,dx}$$
$$= e^{-k^2\frac{x^4}{1.4}+(k^2+k^4)\frac{x^6}{3.4.5}-\cdots}$$

montre sur le champ que les coefficients de développement de cette expression sont aussi des fonctions entières de k^2. J'ajoute qu'ayant les relations suivantes, comme conséquence de la définition

même de $Al(x)_1$, $Al(x)_2$, $Al(x)_3$, à savoir :

$$\operatorname{sn} x = \frac{Al(x)_1}{Al(x)},$$

$$\operatorname{cn} x = \frac{Al(x)_2}{Al(x)},$$

$$\operatorname{dn} x = \frac{Al(x)_3}{Al(x)}.$$

Nous obtenons la même conclusion à l'égard des trois autres fonctions de M. Weierstrass, puisqu'on peut écrire :

$$Al(x)_1 = \operatorname{sn} x \, Al(x),$$
$$Al(x)_2 = \operatorname{cn} x \, Al(x),$$
$$Al(x)_3 = \operatorname{dn} x \, Al(x).$$

A la vérité, nous n'établissons ainsi que la possibilité de développements en série d'une certaine forme, et c'est d'une étude plus approfondie qu'on tire effectivement les formules suivantes :

$$Al(x) = 1 - A\frac{x^2}{2} + B\frac{x^4}{2.3.4} - C\frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \cdots,$$

$$Al(x)_1 = x - A_1\frac{x^3}{2.3} + B_1\frac{x^5}{2.3.4.5} - C_1\frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \cdots,$$

$$Al(x)_2 = 1 - A_2\frac{x^2}{2} + B_2\frac{x^4}{2.3.4} - C_2\frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \cdots,$$

$$Al(x)_3 = 1 - A_3\frac{x^2}{2} + B_3\frac{x^4}{2.3.4} - C_3\frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \cdots,$$

où l'on a :

$A = 0$,	$B = -2k^2$,	$C = -8(k^2+k^4)$,
$A_1 = 1+k^2$,	$B_1 = 1+4k^2+k^4$,	$C_1 = 1+9k^2+9k^4+k^6$,
$A_2 = 1$,	$B_2 = 1+2k^2$,	$C_2 = 1+6k^2+8k^4$,
$A_3 = k^2$,	$B_3 = 2k^2+k^4$,	$C_3 = 8k^2+6k^4+k^6$,
.....	.....	.....

Nous nous contenterons de cette indication succincte qui est suffisante pour donner au moins l'origine d'un mode d'expression analytique, de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, ou le carré du module entre sous forme rationelle, et qui est d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques.

Nous terminerons maintenant ce que nous nous sommes proposé dans ces leçons d'exposer de cette théorie, en donnant dans le cas où elles ont des points singuliers essentiels, l'expression des fonctions doublement périodiques uniformes. Cette question qui a fait le sujet d'un travail de M. Appell, publié dans les Comptes-rendus (5 avril 1882), peut se traiter fort simplement comme il suit :

Soit $F(x)$ la fonction proposée, et admettons que ses périodes soient $2k'$ et $2iK'$

de sorte qu'on ait :

$$F'(x+2K) = F'(x),$$
$$F'(x+2iK') = F'(x).$$

Nous poserons : $F'(x) = \Phi(x) + \operatorname{sn}x \operatorname{cn}x \operatorname{dn}x\, \Phi_1(x)$,

en désignant par $\Phi(x)$ et $\Phi_1(x)$ des fonctions paires, ce qui est toujours possible, comme on le voit en joignant à cette relation celle qu'on en déduit par le changement de x en $-x$, à savoir : $F(-x) = \Phi(x) - \operatorname{sn}x \operatorname{cn}x \operatorname{dn}x\, \Phi_1(x)$.

Cela étant, j'observe que ces fonctions ayant aussi pour périodes $2K$ et $2iK'$, on obtient pour transformées, si l'on fait $\operatorname{sn}x = z$, les expressions :

$$\Phi\left[\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}\right],$$
$$\Phi_1\left[\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{R(z)}}\right],$$

qui sont uniformes par rapport à z. Nous avons vu, en effet, qu'en faisant décrire à la variable un contour quelconque, toutes les déterminations correspondantes de l'intégrale elliptique de première espèce sont données par les formules :

$$4mK + 2m'iK' + \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{R(z)}},$$

et

$$(4m+2)K + 2m'iK' - \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{R(z)}}.$$

Or, la condition de périodicité et celle d'être paires montrent, en effet, que nos expressions représentent bien la même valeur. J'ajoute qu'elles n'ont dans tout le plan qu'un nombre fini de discontinuités. C'est la conséquence, en effet, de ce que dans le parallélogramme des périodes, les fonctions $\Phi(x)$ et $\Phi_1(x)$ n'ont de pôles ou de points essentiels qu'en nombre limité. En désignant une de ces discontinuités par $x = \alpha$, toutes celles qui seront représentées par la formule : $x = \alpha + 2mK + 2m'iK'$, conduisent pour la variable z, soit à la même valeur $z = \operatorname{sn}\alpha$, soit à la valeur de signe contraire $z = -\operatorname{sn}\alpha$, et ces quantités seront en nombre fini.

Le théorème de M. Weierstrass sur l'expression analytique générale des fonctions uniformes nous donnant :

$$\Phi\left[\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{R(z)}}\right] = g(z) + \Sigma G\left(\frac{1}{z - \operatorname{sn}\alpha}\right)$$

on obtient en revenant à la variable x, l'expression cherchée :

$$\Phi(x) = g(\operatorname{sn}x) + \Sigma G\left(\frac{1}{\operatorname{sn}x - \operatorname{sn}\alpha}\right),$$

puis pareillement :

$$\Phi_1(x) = g_1(\operatorname{sn}x) + \Sigma G_1\left(\frac{1}{\operatorname{sn}x - \operatorname{sn}\alpha}\right).$$

De là se conclut la forme analytique générale de la fonction uniforme doublement périodique $F'(x)$, à laquelle nous nous sommes proposé d'arriver.

Démonstration des théorèmes de M. Fuchs sur les intégrales définies K et K', considérées comme fonctions du module, communiquée à M. Hermite par M. Goursat, professeur à la faculté des Sciences de Toulouse.

Soient

$$K=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \qquad iK'=\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

où $R(x)=(1-x^2)(1-k^2x^2)$. Posons : $x^2=u$, $k^2=x$; on trouve pour K et iK' les expressions suivantes :

$$2K=\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{R_1(u)}}, \qquad 2iK'=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{\sqrt{R_1(u)}},$$

où $R_1(u)=u(1-u)(1-xu)$. Considérons d'abord la première intégrale :

$$2K=\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-xu)}},$$

que l'on suppose prise suivant le chemin rectiligne qui joint l'origine au point $u=1$; cette intégrale aura un sens tant que ce chemin ne contiendra pas le point $\frac{1}{x}$, qui est un point de discontinuité pour la fonction sous le signe d'intégration, c'est-à-dire tant que x n'aura pas une valeur réelle et positive, supérieure à l'unité. On est ainsi conduit à regarder la ligne indéfinie $1 \longrightarrow +\infty$ comme une coupure pour cette intégrale. Il reste à fixer la valeur que l'on prend pour le radical ; à cet effet, écrivant l'intégrale :

$$2K=\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{(1-u)(1-xu)}},$$

on convient de prendre pour $\sqrt{u}$ la valeur positive et pour $\sqrt{(1-u)(1-xu)}$ la valeur qui se réduit à l'unité pour $u=0$. D'une autre manière, si l'on écrit l'intégrale :

$$2K=\int_0^1 e^{-\left[\frac{1}{2}\log u+\frac{1}{2}\log.(1-u)+\frac{1}{2}\log(1-xu)\right]}\,du$$

la convention précédente revient à choisir 0 pour argument de u et de $1-u$, et pour argument de $1-xu$ celui qui est nul pour $u=0$. La fonction K ainsi définie est une fonction uniforme de x dans toute l'étendue du plan, mais admettant comme coupure la ligne $1 \longrightarrow +\infty$. En effet, faisons décrire à la variable x un chemin fermé quelconque ne rencontrant pas cette ligne ; le point xu, correspondant à une valeur de u comprise entre 0 et l'unité, décrira une courbe fermée homothétique à la précédente, et laissant le point $u=1$ à l'extérieur. L'argument de $1-xu$ reviendra donc à sa valeur initiale ; il en sera de même de l'élément de l'intégrale qui correspond à cette valeur de u et par suite de l'intégrale elle-même. C'est cette fonction bien déterminée de x se réduisant à $\frac{\pi}{2}$ pour $x=0$, que nous désignerons désormais par K.

Prenons de même l'intégrale $2iK'=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-xu)}}$; cette intégrale, prise suivant

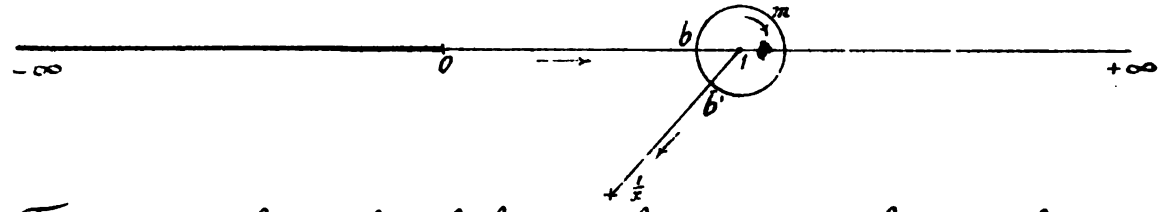
le chemin rectiligne qui joint le point $u=1$ au point $u=\frac{1}{x}$, aura un sens, pourvu que x n'ait pas une valeur réelle et négative ; elle admet donc comme coupure la ligne indéfinie $-\infty \longrightarrow 0$. J'ajoute qu'elle est, comme la précédente, une fonction uniforme de x dans toute l'étendue du plan, si, en effet, on fait le changement de variable :

$$u = \frac{1-x}{x}\, v + 1$$

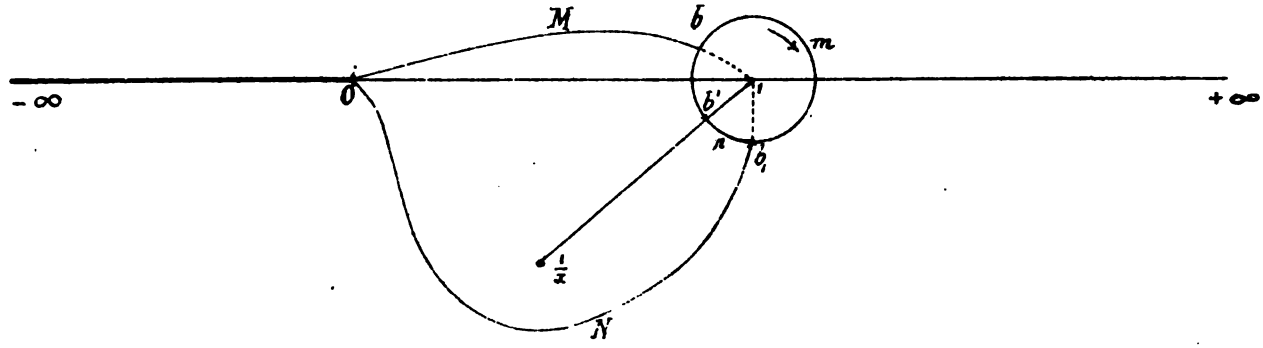
elle devient :

$$2iK' = \frac{i}{\sqrt{x}} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)\left(1-\frac{x-1}{x}v\right)}},$$

et sous cette forme, analogue à la première, on reconnaît tout de suite que lorsque x décrit un chemin fermé quelconque ne coupant pas la ligne $-\infty \longrightarrow 0$, cette intégrale revient à sa valeur initiale. Nous avons encore à choisir la valeur du radical dans l'intégration ; voici à cet égard la convention qui doit être adoptée. Entourons le point $u=1$ d'un cercle de rayon infiniment petit et soient b, b' les points où ce cercle rencontre les lignes droites qui joignent le point $u=1$ à l'origine et au point $u=\frac{1}{x}$.



Faisons décrire à la variable u le chemin rectiligne ob, suivi de l'arc de cercle bmb', décrit en laissant à droite l'aire enveloppée par le cercle dont il vient d'être parlé ; si l'on part de l'origine avec la valeur que nous avons choisie plus haut pour le radical, on arrive au point b' avec une valeur parfaitement déterminée pour ce radical ; c'est cette valeur que l'on prendra dans l'intégration. Au lieu de prendre le chemin rectiligne qui joint l'origine au point $u=1$, on pourrait prendre un chemin quelconque joignant les deux points 0 et 1, assujetti seulement à ne pas couper le chemin rectiligne qui joint les deux points -1 et $\frac{1}{x}$, et l'on arriverait au même résultat.

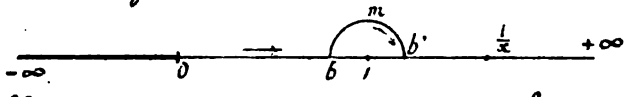


Si l'on prend, par exemple, les deux chemins oMb, oNb_1, en appliquant la règle précédente, arrivé au point b, on devra décrire l'arc bmb_1nb', et arrivé au point b_1, l'arc b_1nb'. Deux chemins $oMbmb_1nb'$, oNb_1nb', laissant entre eux deux racines du polynôme $R_1(u)$

conduisent au point b' à la même valeur pour le radical.

Pour justifier la convention adoptée, donnons à x une valeur réelle et positive, inférieure à l'unité ; K aura une valeur réelle et positive. Quant à l'intégrale qui nous donne $2iK'$, écrivons-la

$$2iK' = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\log(1-u)}}{\sqrt{u(1-xu)}}\,du ;$$



Si l'on applique la règle précédente, la variable u, arrivée au point b, devra décrire l'arc bmb' ; on arrivera au point b' avec $(-\pi)$ pour argument de $(1-u)$ et une valeur positive pour le radical $\sqrt{u(1-xu)}$. On pourra donc écrire :

$$\log(1-u) = \log(u-1) - \pi i$$

$\log(u-1)$ désignant le logarithme arithmétique de $(u-1)$, et l'expression de $2iK'$ devient :

$$2iK' = i\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{\sqrt{u(u-1)(1-xu)}},$$

où le radical a une valeur positive. Il suit de là que K' aura aussi une valeur réelle et positive, et dans le quotient $\frac{iK'}{K}$ le coefficient de i sera positif, comme l'exige la théorie des fonctions elliptiques.

Pour voir ce que deviennent K et iK', lorsque la variable traverse l'une des coupures, nous allons introduire une intégrale auxiliaire, de même forme que les précédentes :

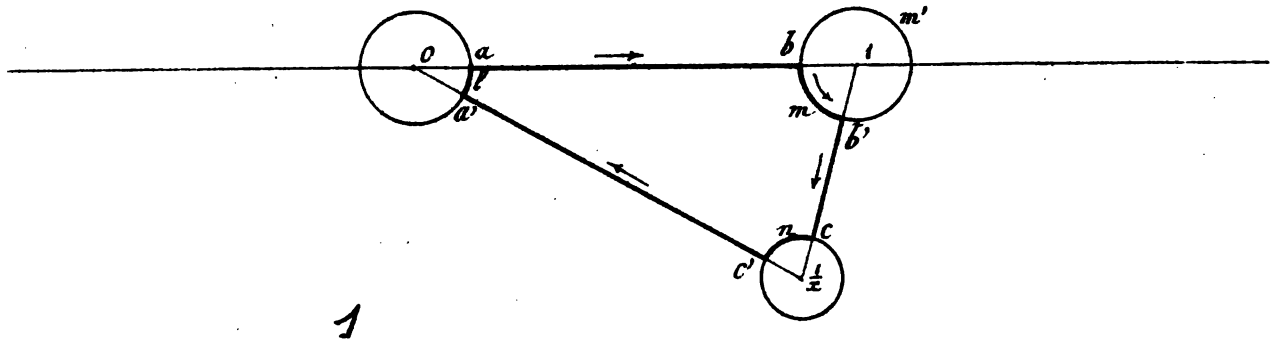
$$2K'' = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-xu)}} ;$$

cette intégrale, prise suivant le chemin rectiligne qui joint l'origine au point $\frac{1}{x}$, admet comme coupure la partie de l'axe réel comprise entre l'origine et le point $u=1$. Mais il y a plus, et la nouvelle intégrale présente avec les deux autres une différence essentielle. Si, en effet, on fait le changement de variable $u = \frac{v}{x}$, elle devient :

$$2K'' = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)(1-\frac{v}{x})}},$$

et cette forme montre immédiatement que, si la variable x décrit un contour fermé entourant une seule fois la coupure $0 \text{ ——— } 1$, K'' revient à sa valeur initiale changée de signe. Pour avoir une fonction uniforme, il faudra ajouter une nouvelle coupure, par exemple la ligne : $1 \text{ ——— } +\infty$. On convient, en outre, de prendre pour arguments de $1-u$ et de $1-xu$ ceux qui sont nuls pour $u=0$, et afin de satisfaire à la condition de discontinuité, l'argument de u qui est compris entre 0 et 2π. Il est essentiel de remarquer qu'aux deux bords de la coupure $1 \text{ ——— } +\infty$, K'' prend des valeurs égales et de signes contraires, de sorte que K'' se change en $-K''$, lorsque la variable franchit cette coupure.

Entre les fonctions K, iK', K'' il existe une relation linéaire et homogène, mais cette relation est différente, suivant que le point qui figure la valeur de x est situé dans la partie supérieure ou dans la partie inférieure du plan. Supposons d'abord ce point situé dans la partie supérieure du plan ; le point $\frac{1}{x}$ sera dans la partie inférieure. Joignons les 3 points $0, 1, \frac{1}{x}$ par des lignes droites et entourons chacun de ces points d'un cercle de rayon infiniment petit.



1

La fonction $\sqrt{u(1-u)(1-xu)}$ est holomorphe à l'intérieur du contour formé abmb'nc'd'la, formé par les côtés du triangle ayant pour sommets les points $0, 1, \frac{1}{x}$ et des arcs des circonférences entourant ces sommets. D'après le théorème de Cauchy, l'intégrale $\int \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-xu)}}$ prise le long du contour complet est égale à zéro ; ce qui nous donne l'égalité :

$$(ab) + (bmb') + (b'c) + (cnc') + (c'a') + (a'la) = 0,$$

où l'on désigne une intégrale par l'indication du chemin entre parenthèses.

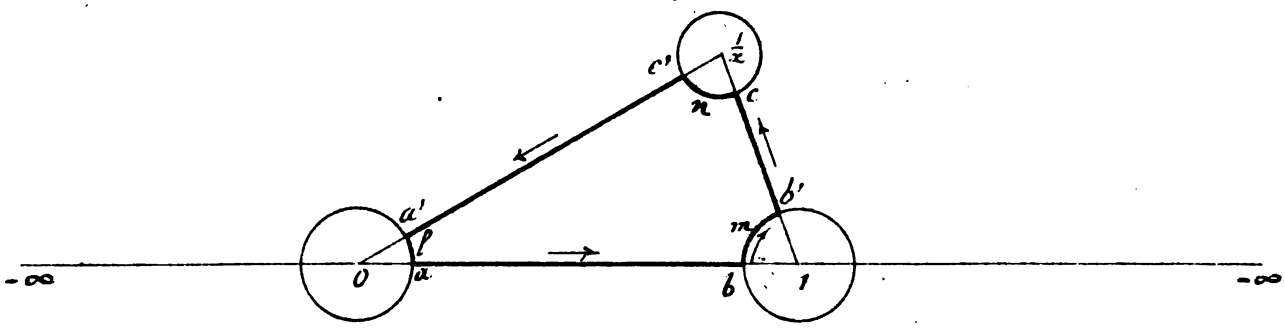
Faisons maintenant décroître indéfiniment les rayons des petits cercles ; un calcul facile montre que les intégrales (bmb'), (cnc'), $(a'la)$ tendent vers zéro, et il nous reste :

$$\int_0^{\prime} \frac{du}{\sqrt{R_1(u)}} + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{\sqrt{R_1(u)}} = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{du}{\sqrt{R_1(u)}}.$$

Dans cette dernière égalité, il est bien aisé de voir quelles sont les valeurs que l'on doit prendre pour le radical $\sqrt{R_1(u)}$. Si l'on part du point a, infiniment voisin de l'origine, avec la valeur du radical spécifiée au début, on arrivera au point b' avec une valeur pour le radical de signe contraire à celle que l'on obtiendrait après avoir décrit le chemin abm'b', en se reportant aux conventions adoptées, il en résulte que l'intégrale provenant du chemin b'c sera égale à $-2iK$. De même, après avoir décrit le chemin abmb'cnc'a', on arrive au point a' avec un argument pour u compris entre $-\pi$ et 0, et des arguments pour $1-u$ et $1-xu$ qui se réduisent à 0 avec u ; l'intégrale $(a'c')$ sera donc égale à $-2K''$. D'où il suit que, pour un point pris dans la partie supérieure du plan, on a la relation :

$$(1) \qquad K - iK' = -K''.$$

Supposons, en second lieu, le point qui figure la valeur de x situé dans la partie inférieure du plan, et répétons le raisonnement sur la nouvelle figure.



On aura, comme plus haut :

$$(ab) + (bmb') + (b'c) + (cnc') + (c'a') + (a'la) = 0 ;$$

ou en faisant décroître indéfiniment les rayons des petites circonférences :

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{R_1(u)}} + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{\sqrt{R_1(u)}} = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{du}{\sqrt{R_1(u)}}.$$

Mais après avoir décrit le chemin $abmb'$, on arrivera au point b' avec une valeur pour le radical qui est précisément celle que nous avons choisie pour obtenir $2iK'$, en de plus, le long du chemin $a'c'$, l'argument de u sera compris entre 0 et 2π. De sorte que la relation, pour un point pris dans la partie inférieure du plan sera :

$$(2) \qquad K + iK' = K''.$$

Au moyen des formules (1) et (2), nous pouvons voir ce que deviennent K et iK' quand on fait franchir à la variable une des coupures $-\infty$ ——— 0, 1 ——— $+\infty$.

Faisons d'abord franchir à la variable la ligne $-\infty$ ——— 0, qui est une coupure pour iK', en passant du bord supérieur au bord inférieur ; pour cela, je remplace iK' par sa valeur $K + K''$, tirée de la formule (1) qui a lieu pour un point pris sur le bord supérieur de la coupure. Mais cette ligne n'étant une coupure pour aucune des fonctions K, K'', la continuation analytique de la fonction sera encore représentée après le passage par $K + K''$; comme on se trouve alors dans la partie inférieure du plan, en remplaçant K'' par sa valeur tirée de l'équation (2), on voit que par le passage du bord supérieur au bord inférieur de la coupure, iK' se change en $2K + iK'$. De même, le passage du bord supérieur au bord inférieur change iK' en $-2K + iK'$.

On étudiera de la même façon ce que devient K quand on traverse la coupure 1 ——— $+\infty$. Supposons que l'on veuille passer du bord inférieur au bord supérieur ; avant le passage, je remplace K par sa valeur $K'' - iK'$, que nous fournit la formule (2). Lorsqu'on franchit la ligne 1 ——— $+\infty$, qui n'est pas une coupure pour iK', nous avons remarqué plus haut que K'' se changeait en $-K''$. On arrivera donc au bord supérieur avec la valeur $-K'' - iK'$, c'est-à-dire, en appliquant la formule (1), avec la valeur $K - 2iK'$. Par le passage du bord supérieur au bord inférieur, K se changerait en $K + 2iK'$.

Il résulte de ce qui précède que lorsque la variable franchit la même coupure deux fois de suite dans des sens opposés, les fonctions K et iK' ne changent pas, de sorte que les seuls contours fermés qui puissent ne pas ramener ces fonctions à leurs valeurs initiales sont ceux qui comprennent dans leur intérieur l'un au moins des points 0 et 1. On voit aussi immédiatement comment se comportent ces fonctions quand on tourne autour d'un de ces points. Faisons décrire à la variable un lacet dans le sens direct autour de l'origine ; nous savons que K revient à sa valeur initiale. Mais la variable franchissant une fois la coupure $-\infty$ ——— 0, en passant du bord supérieur au bord inférieur, iK' se change en $2K + iK'$.

Un lacet dans le sens rétrograde changerait iK' en $-2K + iK'$. De même un lacet autour du point $u = 1$ revient à faire franchir à la variable la coupure 1 ——— $+\infty$ du bord inférieur au bord supérieur ou inversement, suivant que ce lacet est décrit dans le sens direct

ou dans le sens rétrograde. On est ainsi conduit à remplacer K et iK' par $K-2iK'$ et iK' dans le premier cas et par $K+2iK'$ et iK' dans le second.

Table des matières.

1ère Leçon, ... pages 1-6.

Quadrature des courbes planes. Aire de l'ellipse, de l'hyperbole, des courbes unicursales, de la cycloïde.

2ème Leçon, ... pages 6-12.

Expression de l'aire des cubiques planes par les intégrales elliptiques. Substitution pour faire disparaître dans un polynôme du 4e degré les puissances impaires. Aire de l'ellipse en coordonnées polaires, en remarque relative aux changements de variables dans les intégrales définies.

3ème Leçon, ... pages 12-21.

Rectification des courbes planes. Arc de parabole. Arc d'ellipse et d'hyperbole. Théorèmes de Fagnano, de MM. Graves et de Chasles sur les arcs d'ellipse à différence rectifiable. Réduction de l'intégrale $\int f(x, \sqrt{[1-x^2)(1-k^2x^2)}]\,dx$, aux fonctions de première, de seconde et de troisième espèce.

4ème Leçon, ... pages 21-28.

Indication des théorèmes d'Abel et de M. Liouville, sur la détermination sous forme explicite, de ces intégrales. Exemples de plusieurs cas où elles se ramènent par une substitution, à l'intégration des fonctions rationnelles. Théorème de Landen. Arcs des courbes unicursales. Volume et surface des corps de révolution. Volumes des corps limités par une surface quelconque, et notion analytique de l'intégrale double $\iint f(x,y)\,dx\,dy$, relative à une courbe fermée $F(x,y)=0$.

5ème Leçon, ... pages 29-38.

Cas particuliers où cette courbe se réduit à un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes coordonnés. Développement en série, suivant les puissances de h et k, de l'intégrale $\int_a^{a+h} dx \int_b^{b+k} f(x,y)\,dy$. Extension à cette intégrale de la méthode d'approximation des quadratures de Gauss.

Examen des cas où $f(x,y)$ est une dérivée par rapport à x, ou par rapport à y, et notion des intégrales curvilignes. Evaluation du volume d'un cylindre droit, d'un ellipsoïde.

Définition de l'aire des surfaces courbes quelconques; note communiquée par M. Schwarz, de Göttingue, sur l'insuffisance de cette définition.

6ème Leçon, ... pages 38-42.

Représentation géométrique d'une variable imaginaire; son importance pour l'étude des fonctions. Proposition sur la variation de l'argument d'un binôme du premier degré, puis d'un polynôme quelconque, lorsque la variable indépendante décrit un contour fermé. Etude succinte de la racine carrée d'un polynôme. Fonctions uniformes et non uniformes. Etude de $\log(z-a)$.

7ème Leçon, ... pages 43-50.

Remarques sur les intégrales définies des fonctions réelles ou imaginaires, lorsque les

limites sont réelles. Expressions de M. Darboux et de M. Weierstrass de l'intégrale : $\int_a^b F(x)[\varphi(x)+i\psi(x)]\,dx$ lorsque $F(x)$ conserve le même signe entre les limites. Proposition de M. Tchebicheff sur l'intégrale définie d'un produit de deux fonctions réelles.

Définition donnée par Cauchy de l'intégrale prise entre des limites quelconques réelles ou imaginaires. Expression qui résulte de cette définition.

8ème Leçon, ... pages 50-55.

Influence du chemin décrit par la variable sur l'intégrale de Cauchy. Méthode de Riemann fondée sur le théorème de Green. - Démonstration de ce théorème, et notion des aires à plusieurs contours de M. Neumann. L'intégrale d'une fonction uniforme et continue dans une aire donnée, et prise en suivant le contour de cette aire, est nulle. Exemples de détermination d'intégrales, relatives à un contour fermé.

9ème Leçon, ... pages 56-63.

Importance de la formule de Cauchy : $f(x)=\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)}{z-x}\,dz$. Elle donne l'expression analytique d'une fonction qui coïncide dans les aires déterminées avec les fonctions données arbitrairement, et qui est nulle en dehors de ces aires. Séries de Taylor et de Maclaurin. Remarques sur le développement de e^x; irrationnalité des puissances entières du nombre e. Remarques sur la formule du binôme. Propriétés fondamentales des fonctions holomorphes.

10ème Leçon, ... pages 63-70.

Suite de l'étude des fonctions holomorphes. Démonstration par la méthode de M. Mittag-Leffler du théorème de M. Weierstrass sur leur décomposition en facteurs primaires. Application à $\sin\pi x$. Du genre des fonctions holomorphes d'après M. Laguerre.

11ème Leçon, ... pages 70-77.

Fonctions uniformes non holomorphes, lorsqu'elles n'ont de discontinuités qu'en des points isolés séparés par des intervalles finis. Leur expression analytique dans le cas où les discontinuités sont en nombre limité. Notion des pôles et des points essentiels. Leur intégrale le long d'une courbe fermée. Notion des résidus de Cauchy, et applications.

12ème Leçon, ... pages 77-86.

Fonctions uniformes dans le cas d'un nombre infini de pôles ou de points essentiels. Leur intégrale le long d'une courbe fermée. Leur expression analytique obtenue par M. Mittag-Leffler.

13ème Leçon, ... pages 87-94.

Expression des fonctions uniformes appelées méromorphes, lorsqu'elles n'ont que des pôles par le quotient de deux fonctions holomorphes. Démonstration d'après M. Picard du théorème de Riemann, que deux fonctions uniformes ne peuvent coïncider le long d'un élément de grandeur finie, sans être identiques.

Etude de la fonction $\Gamma(a)$; expression de M. Prym, définition de Gauss, théorème de M. Weierstrass sur $\frac{1}{\Gamma(a)}$.

14ème Leçon, ... pages 94-102.

Propriétés fondamentales de $\Gamma(a)$. Expression approchée de $\log \Gamma(a)$, lorsque la variable est une quantité positive très-grande, par la formule :

$$\log \Gamma(a) = (a-\tfrac{1}{2})\log a - a + \log \sqrt{2\pi} + J.$$

15ème Leçon, ... pages 102-108.

Développement, suivant les puissances descendantes de a, du terme complémentaire J; expression obtenue par Cauchy de la série limitée à un nombre fini de termes.

Application du théorème de M. Mittag-Leffler aux fonctions :

$$f(x) = \frac{\Gamma(x+a)\,\Gamma(x+b)\,\ldots\ldots\,\Gamma(x+l)}{\Gamma(x+a')\,\Gamma(x+b')\,\ldots\ldots\,\Gamma(x+l')}$$

et

$$f(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)\,\Gamma(x+b)}.$$

16ème Leçon, ... pages 108-116.

Fonctions uniformes qui sont discontinues le long d'une ligne. L'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{z-a-ib+t}$, considérée comme fonction de z, puis en général $\int_a^b f(z+t)\,dt$, $f(t)$ étant une fonction uniforme. Notion de coupure; son emploi pour la détermination de quelques intégrales définies; $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx = \pi(\operatorname{cotg} a\pi - \operatorname{cotg} b\pi)$, $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$. Remarque sur la formule : $\int_0^1 \frac{x^{a-1}-x^{-a}}{1-x}\,dx = \pi \operatorname{cotg} a\pi$.

17ème Leçon, ... pages 116-124.

Étude de l'intégrale : $\int_a^b \frac{F(t,z)}{G(t,z)}\,dx$, où les fonctions $F(t,x)$ et $G(t,z)$ sont holomorphes en t et z. Fonctions définies par des séries composées rationnellement avec la variable et qui ont des coupures. Séries de M. Tannery et de M. Appell. Exemple donné par M. Poincaré d'une fonction ayant un espace lacunaire.

Expression par une intégrale curviligne du nombre des racines d'une équation, dans un contour donné. Expression d'une racine et d'une fonction quelconque d'une racine, lorsqu'elle est isolée dans un contour.

18ème Leçon, ... pages 124-131.

Étude de l'intégrale $\int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)}$, où $f(t)$ est une fonction méromorphe. Théorème de Cauchy sur le nombre des racines d'une équation contenues dans un contour fermé. Algorithme analogue à celui du théorème de Sturm, pour obtenir ce nombre dans le cas des équations algébriques lorsque le contour est représenté par une courbe unicursale. Série de Lagrange.

19ème Leçon, ... pages 131-138.

Suite de la série de Lagrange. Son application au développement de $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$; indication succincte des propriétés des polynômes de Legendre. — Théorème d'Eisenstein sur les séries dont les coefficients sont commensurables, et qui satisfont à une équation algébrique. Énoncé d'un théorème de M. Tchebicheff sur les séries à coefficients rationnels, lorsqu'elles représentent une fonction explicite de la variable.

20ème Leçon, ... pages 139-146.

Valeurs diverses de l'intégrale d'une fonction uniforme présentant des discontinuités suivant le chemin suivi par la variable. Application à l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$. Comment les valeurs multiples amènent en général une complète indétermination. Proposition de M. Tchebicheff sur les minima successifs de l'expression $x - ay - \alpha$, pour des valeurs entières de x et y. Conception de Riemann qui transforme ces intégrales à déterminations multiples en fonctions uniformes affectées de coupures. Transformation analogue de la racine carrée d'un polynôme en fonction uniforme.

21ème Leçon, ... pages 146-153.

Valeurs multiples de l'intégrale elliptique de première espèce, qui correspondent aux divers chemins suivis par la variable; double périodicité de la fonction inverse de cette intégrale. Théorie des fonctions elliptiques. Définition et propriétés de la fonction $\Phi(x)$, qui conduisent à l'expression analytique d'une catégorie de fonctions doublement périodiques.

22ème Leçon, ... pages 153-161.

Parallélogramme des périodes. Détermination du nombre des racines de l'équation $\Phi(x) = 0$ qui sont contenues dans ce parallélogramme. Importance du cas où ce nombre est l'unité. Introduction de la fonction $X(x)$ qui correspond à ce cas et de la dérivée logarithmique $Z(x) = D_x \log X(x)$ où l'on suppose $X(c) = 0$. Toute fonction uniforme doublement périodique, $F(x)$, n'ayant que des discontinuités polaires, s'exprime linéairement par les quantités $Z(x-\alpha)$ et leurs dérivées. Conséquences de ce théorème; son application à $D_x \log F(x)$, et la nouvelle expression générale de $F(x)$ qui en résulte.

23ème Leçon . . . . . pages 161-170.

Fonctions doublement périodiques de seconde espèce; leur expression la plus générale dans le cas où elles n'ont que des pôles. La fonction $X(x)$, mise sous la forme d'un produit de facteurs primaires. — Définition des fonctions de Jacobi $\Theta(x)$, $H(x)$, $\Theta_1(x)$, $H_1(x)$. — Formules fondamentales relatives au changement de x en $x+K$, $x+iK'$, $x+K+iK'$, puis en $x+2iK'$.

24ème Leçon. — . . . . . pag. 170-178.

Racines des équations $\Theta(x) = 0$, $H(x) = 0$, $\Theta_1(x) = 0$, $H_1(x) = 0$. Définition des 3 fonctions doublement périodiques, $\mathrm{sn}x$, $\mathrm{cn}x$, $\mathrm{dn}x$. Leurs relations algébriques et différentielles. Inversion de l'intégrale elliptique de première espèce (x). Expression de $\mathrm{sn}(x+a)$, $\mathrm{cn}(x+a)$ $\mathrm{dn}(x+a)$

---

(1) Je rétablis ici un passage omis dans le texte. Lorsque K et K' sont réelles, l'expression $\mathrm{sn}x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\Theta(x)}$ représente une suite de quantités réelles, variant d'une manière continue de zéro à l'unité, lorsque x croît de zéro à K, puisque le dénominateur $\Theta(x)$ ne s'annule que pour la valeur imaginaire $x = iK'$.

Employons ensuite la formule $\mathrm{Sn}(K+x) = \frac{\mathrm{Cn}x}{\mathrm{dn}x}$; et changeons x en ix, ce qui donne: $\mathrm{Sn}(K+ix) = \frac{\mathrm{Cd}ix}{\mathrm{dn}ix}$.

Cela étant, on voit qu'en faisant croître x de zéro à K', le second membre qui est réel, varie

et Z(x+a). Définitions des fonctions de M. Weierstrass.

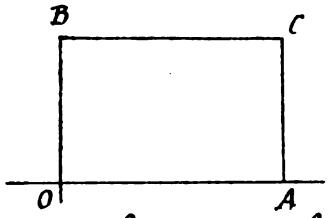
25ème Leçon, ... page 178-190.

Propriétés des quantités K et iK', considérées comme fonctions de k^2. Nouvelles formes analytiques qui en résultent pour Θ(x), H(x), $\Theta_1(x)$, $H_1(x)$. Inversion de l'intégrale elliptique dans le cas où le module k a une valeur réelle ou imaginaire quelconque. Expression des fonctions doublement périodiques uniformes, dans le cas où elles ont des points singuliers essentiels.

——— Démonstration des théorèmes de M. Fuchs sur les intégrales définies K et K', considérées comme fonctions du module, communiquée à M. Hermite par M. Goursat, professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse . . . . . page 191-196.

---

d'une manière continue de l'unité à $\frac{1}{k_2}$. Dans cet intervalle, en effet, la dénomination dnx est toujours différente de zéro et l'on a bien $sn(K+iK') = \frac{1}{k}$, d'après la relation $sn(K+iK'+x) = \frac{dnx}{k\,cnx}$, en y faisant $x=0$.



Pour suivre facilement la marche des valeurs réelles et positives que prennent les trois fonctions snx, cnx, dnx, il suffit de considérer le rectangle OACB, où OA = K, OB = K'. Lorsque la variable décrit successivement les côtés OA, AC, CB, snx croît de zéro à l'unité, de l'unité à $\frac{1}{k}$, de $\frac{1}{k}$ à l'infini. A l'égard de cnx, on considérera le chemin formé de AO et de OB. La fonction croîtra alors de zéro à l'unité, puis de l'unité à l'infini. Enfin pour dnx, la variable décrivant les droites CA, AO et OB, la fonction croît de zéro à k', de k' à l'unité, et enfin de l'unité à l'infini.

Fin de la table.

I promise to return the following-named book with understood that a failure to return the book will

Name

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

8, Rue de la Sorbonne, 8

ACTA MATHEMATICA

Rédacteur en Chef, M. MITTAG-LEFFLER, Professeur à l'Université de Stockholm

Les Mémoires qui paraîtront dans les premiers volumes des « **ACTA** » seront rédigés par MM. APPEL, CANTOR, CASORATI, FUCHS, GOURSAT, HALPHEN, HERMITE, LIE, MANNHEIM, NETTO, PICARD, POINCARRÉ, SCHERING, WEIERSTRASS, ZEUTHEN.

Les « **ACTA MATHEMATICA** » paraîtront à des époques variables. 4 cahiers formeront un volume in-4° d'environ 50 feuilles, imprimé sur papier fort glacé.

Prix du volume : 15 fr. — Franco pour toute l'Europe : 16 fr. 25

Sommaire du 1er cahier

Poincarré. — Théorie des groupes Fuchsiens..... 1
Malmsten. C. J. — Zur Theorie der Leibrenten..... 63
Gylden. H. — Eine Annaeherungsmethode in Probleme der drei Koerper..... 77
Reye. Th. — Das Problem der Configurationen..... 93

2e cahier

Reye. Th. — Die Hexaëder — Und die Octaëder Configurationen (12_6, 16_3)..... 97
Appel. P. — Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y)..... 109
Appel. P. — Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y) second mémoire..... 132
Appel. P. — Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle..... 145
Schering. E. — Zur Theorie der quadratischen Reste..... 153
Zeuthen. H. G. — Sur un groupe de théorèmes et formules de la géométrie énumérative..... 171
Goursat. E. — Sur un théorème de M. Hermite..... 189

Ch. Riquier, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Caen. — *Application de la théorie algébrique des formes quadratiques à la classification des lignes et des surfaces du second ordre.* — 1 vol. in-8° br. **2 fr. 50**

Ce petit ouvrage vient heureusement compléter une lacune que présente la plupart des traités de géométrie analytique en donnant une solution élémentaire d'un problème important récemment introduit dans le programme de la classe de Mathématiques spéciales.

Meray. — *Nouveaux éléments de géométrie.* — 1 vol. in-8° br. 1874..... **5 fr.**
Meray. — *Nouveau précis d'analyse infinitésimale.* — 1 vol. in-8° br. 1872..... **7 fr.**

Le Mans. — Typ. Ed. Monnoyer. — Février 1883.

NOV 19 1937